ZUR KONSTRUKTIV-AXIOMATISCHEN CHARAKTERISIERUNG DER RIEMANN-HELMHOLTZ-LIESCHEN RAUMGEOMETRIEN UND DER POINCARÉ-EINSTEIN-MINKOWSKISCHEN RAUMZEITGEOMETRIEN DURCH DAS PRINZIP DER REPRODUZIERBARKEIT

Dieter Mayr

München, den 31. Mai 1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547009_0047

ZUR KONSTRUKTIV-AXIOMATISCHEN CHARAKTERISIERUNG DER RIEMANN-HELMHOLTZ-LIESCHEN RAUMGEOMETRIEN UND DER POINCARÉ-EINSTEIN-MINKOWSKISCHEN RAUMZEITGEOMETRIEN DURCH DAS PRINZIP DER REPRODUZIERBARKEIT.

Dissertation der Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Dieter Mayr
aus Gräfelfing

München, den 31. Mai 1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. G. Süßmann

Korreferent: Prof. Dr. J. Ehlers

Tag der mündlichen Prüfung: 30. 7. 1979

Zusammenfassung

(1) Im Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblem wird untersucht, welche axiomatischen Voraussetzungen für die Charakterisierung der euklidischen und nichteuklidischen Räume konstanter Krümmung ausreichen. Analog dazu nennen wir die axiomatische Analyse der speziell relativistischen Raumzeit das Poincaré-Einstein-Minkowskischen Raumzeitproblem. Beide Problemkreise fassen wir hier in einem gemeinsamen Axiomensystem zusammen.

(2) Als physikalische Grundlage verwenden wir das Prinzip von der Reproduzierbarkeit makrophysikalischer Prozesse, das experimentell mit großer Genauigkeit bestätigt ist. Die Basis der mathematischen Theorie bilden die undefinierten Grundgrößen Prozess, eine Relation auf den Prozessen ("Inklusion") und die Reproduktion von Prozessen, deren raumzeitliche Interpretationen unmittelbar durch physikalisch wirkliche Sachverhalte gegeben sind. Im Fall des Raumproblems beziehen sich die Basisterme auf den Transport von Körpern. Mit den Grundbegriffen formulieren wir sechs Axiome, die sich im Prinzip im Labor testen lassen.

(3) Auf der Menge der Prozesse definieren wir eine präuniforme Struktur, die den Begriff des Cauchy-Präfilters impliziert, der zur Konstruktion von Ereignispunkten notwendig ist.

Die Ereignisse bilden ein homogenes, vollständiges Kontinuum, dessen topologische Eigenschaften - z.B.hausdorffsch, lokalkompakt und separabel - im wesentlichen auf die Punktekonstruktion zurückgehen. In der physikalischen Interpretation beschreibt die Präuniformität die bei Messungen auftretenden Unschärfemengen.

(4) Die Reproduktionen lassen sich als topologische Transformationsgruppe darstellen, die - geeignet vervollständigt - transitiv auf dem Ereignisraum operiert. Mit Hilfe der Standuntergruppe definieren wir den Isotropiekegel, der in der Raumgeometrie einem Punkt und in der Raumzeitgeometrie einem Lichtkegel entspricht. Außerhalb des Isotropiekegels lassen sich die Abstandssphären so anordnen, daß sie zu den reellen Zahlen ordnungsisomorph werden. Schließlich erhalten wir daraus eine reellwertige Funktion ("Quasimetrik"), die die Abstandsstrukturen der Raum- bzw.Raumzeitgeometrien beschreibt.

(5) In der mathematischen Theorie haben wir damit die allgemeinen Voraussetzungen abgeleitet, die zur Klassifikation der euklidischen und nichteuklidischen Raumgeometrien sowie der pseudo-euklidischen und pseudo-nichteuklidischen Raumzeitgeometrien führen. Ihre physikalische Deutung stützt sich dabei auf das Prinzip der Reproduzierbarkeit.

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung 7

II. Die konstruktiv-axiomatische Charakterisierung der Vorgangswelt 19

1. Starrheit, Trägheit und Reproduzierbarkeit 19
1.1 Das Riemann-Helmholtz-Liesche Raumproblem 19
1.2 Das Poincaré-Einstein-Minkowskische Raumzeitproblem 24

2. Prozesse und Reproduktionen - Grundbegriffe 33
2.1 Vorgang und Prozess (Axiom 1) 33
2.2 Wiederholung und Reproduktion (Axiom 2) 34

3. Prozesse und Reproduktionen - Eigenschaften 38
3.1 Lokale Charakterisierung (Axiom 3, 4) 38
3.2 Globale Kennzeichnung (Axiom 5, 6) 47

III. Die mathematischen Strukturen der Raumzeit 57

1. Das Axiomensystem 57

2. Die Topologie der Raumzeit 59
2.1 Topologisierung der Reproduktionsgruppe 59
2.2 Punktierung der Prozessmenge 61
2.3 Topologie des Ereignisraumes 68

3. Die Struktur der Raumzeittransformationen 74

3.1 Reproduktionen - Ereignistransformationen 74

3.2 Zusammenhang und Transitivität 85

4. Die Strukturen des Orbitraumes 90

4.1 Die Bahnen der Standuntergruppe 90

4.2 Die reellwertige Quasimetrik 97

IV. Die Geometrien des Raum- bzw. des Raumzeitproblems 102

1. Die Klassifizierung von Freudenthal 102

Literatur 109

I. Einleitung

1.1 Seit über hundert Jahren gibt es das auf B.Riemann, H.v. Helmholtz und S.Lie zurückgehende Raumproblem, das die axiomatische Charakterisierung des physikalischen Raumes betrifft. In ihm wird untersucht, welche topologischen und gruppentheoretischen Voraussetzungen genügen, um daraus die Klassifizierung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien konstanter Krümmung abzuleiten. Etwa fünfzig Jahre später entwickelte sich eine zum Raumproblem analoge Fragestellung, welche die axiomatische Kennzeichnung der relativistischen Raumzeit betraf und die wir das Poincaré-Einstein-Minkowskische Raumzeitproblem nennen wollen. Die beiden Problemkreise zeigen deutliche Gemeinsamkeiten, da sich beide als Invarianzprobleme von Automorphismengruppen auffassen lassen. Die Invarianzstruktur erscheint beim Raumproblem in der Kongruenz bzw.Starrheit von Raumgebieten, die bei Bewegungen erhalten bleiben.Im Fall der Raumzeit liegen die invarianten Strukturen in der minkowskischen Abstandsmetrik bzw. in den bei Poincaré-Transformationen invarianten Geraden, die physikalisch als Lichtsignale oder Trägheitsbahnen interpretiert werden. Diese Strukturen hängen eng zusammen. So kann z.B.die Kongruenz und die Starrheit von Maßstäben durch Trägheitsbahnen von freifallenden Partikeln dargestellt werden (s.J.Ehlers 1973). Hinter dieser begriffli-

chen Verbindung der Invarianzkonzepte Starrheit und Trägheit läßt sich eine Kombination des Raumproblems und des Raumzeitproblems vermuten, in der beide als Spezialfälle eines allgemeineren Invarianzproblems erscheinen. Zumindest wird diese Vermutung von der Ähnlichkeit zwischen der Raumzeitgeometrie Minkowskis und der euklidischen Geometrie unterstützt.

Die Invarianzeigenschaften charakterisieren jedoch nur die eine Hälfte des Raum- und des Raumzeitproblems. Erfahrungsgemäß weiß man vom Operieren mit festen Körpern, daß dabei jede Lage und Position im Raum eingenommen werden kann. Dazu ist offenbar eine erhebliche Fülle an unbeschränkten Transport- und Bewegungsmöglichkeiten erforderlich. Daß diese Möglichkeiten nicht a priori gegeben sind, weiß man spätestens seit der Entdeckung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, in denen diese "Mobilitätsforderungen" im allgemeinen nicht mehr erfüllt werden können. Dagegen sind die euklidischen und die nichteuklidischen Geometrien mit konstanter Krümmung und genügender Isotropie durch die volle Beweglichkeit, d.h.durch die uneingeschränkte Dreh- und Verschiebbarkeit der **invarianten Körper ausgezeichnet** (H.v. Helmholtz 1868).Also erfordert die geometrische Kennzeichnung der Raumstruktur das Zusammenwirken von Invarianz- und (maximalen) Mobilitätsforderungen. Beim Raumzeitproblem begegnen wir einer analogen Verkettung von Invarianz und Mobilität, die physikalisch durch das Prinzip der Reproduzierbarkeit von makrophysikalischen Prozessen ausgedrückt werden kann. Im folgenden wollen wir dieses fundamentale Prinzip [1] und seine Relevanz

---

1) Daß dieses Prinzip in der Tat von grundsätzlicher Bedeutung ist, erkennt man an der Kurzform "Unter gleichen Bedingungen geschieht Gleiches", die praktisch zu der deterministischen Verschärfung des Kausalprinzips "Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkung" äquivalent ist.

für das Raumzeitproblem etwas näher erläutern.

Interpretieren wir das starre Dauern eines Maßstabes als einen stationären Vorgang, dann eröffnet sich eine über die räumliche Invarianz und Mobilität hinausgehende Perspektive. Die Invarianz des Körperraumes ist dann nur mehr der visuelle Aspekt einer allgemeineren Invarianzeigenschaft, die sich auf raumzeitliche Gebilde, auf Prozesse bezieht. Physikalisch läßt sich dies auf folgende Weise beschreiben. Unter bestimmten Vorsichtsmaßnahmen können physikalische Zustände und experimentelle Vorgänge erfahrungsgemäß an anderen Orten und zu anderen Zeiten so wiederholt werden, daß sie in allen Meßergebnissen übereinstimmen. Das freie Reproduzieren von physikalisch äquivalenten Abläufen entspricht, geometrisch interpretiert, dem raumzeitlichen "Transport" eines Prozesses, der dabei in all seinen Abläufen bzw.Teilen unverändert bleibt. Diese Invarianzeigenschaft charakterisiert die Reproduktionen in analoger Weise wie die Starrheitsrelation die Bewegungen gekennzeichnet hatte. Idealisiert man die Voraussetzung der Reproduzierbarkeit so, daß im Prinzip jederzeit und überall äquivalente Anfangs- und Nebenbedingungen möglich sind, dann wird dadurch auch die gewünschte Mobilität der Reproduktionsgruppe gewährleistet.

Das Prinzip der Reproduzierbarkeit wird nicht nur als Erfahrungstatsache, sondern häufig sogar als eine Grundlage der Erfahrung angesehen. So bleibt z.B.die relative Eichung von Maßstäben und Uhren immer und unabhängig von der Vergangenheit der Etalons erhalten. Auf diesen experimentellen Sachverhalt hat A.Einstein bereits 1918 aufmerksam gemacht. In traditioneller Weise leitet man daraus die Anwendung der in irdischen Systemen

gewonnenen Grundgrößen und Gesetzmäßigkeiten auf den Kosmos ab. Zugleich sieht man darin eine der Bedingungen, die die Physik als Wissenschaft erst ermöglichen. Natürlich ist diese Erweiterung nicht ganz unproblematisch. Unterscheiden wir zwischen mikro-, makro- und astrophysikalischen Bereichen, dann ist es zweifelhat, ob die im raumzeitlich-lokalen Labor entwickelten Begriffe und Theorien mit den Experimenten und Theorien verträglich sind, welche die mikroskopischen (Quantentheorie) und kosmischen (Einsteinsche Gravitationstheorie) Raumzeitbereiche erschließen. Offenbar handelt es sich hier um das Problem, ob die Strukturen des Lokalen mit den Strukturen des Punktalen und Infinitesimalen oder des Globalen verträglich sind. Mit anderen Worten - dieses Konsistenzproblem soll Aufschluß geben, ob es gerechtfertigt ist, alle Bereiche in einem einzigen Raumzeitbegriff zu vereinen.

Die Analogie der Invarianz- und Mobilitätskonzepte zwischen dem Raum- und dem Raumzeitproblem blieb erstaunlich lange unbeachtet, bis sie 1964 erstmals von dem Mathematiker H. Freudenthal in einer gemeinsamen Behandlung beider Problemkreise aufgegriffen wurde. 1956 hatte Freudenthal kurz nach J.Tits (1955) das Raumproblem zu einem gewissen Abschluß gebracht. Zum erstenmal wurde, unter Verzicht auf Differenzierbarkeitsannahmen und ohne Metrik, allein aus gruppentopologischen Axiomen und Argumenten der Lie-Charakter der Gruppe abgeleitet. Diese Deduktion der Differenzierbarkeitsstruktur stützte sich dabei wesentlich auf das Theorem von H.Yamabe (1953). Freudenthal vereinfachte dann noch den Titsschen Beweisgang mit Lie-

algebraischen Argumenten und erhielt wieder die gewünschte Klassifikation der Geometrien. In der späteren, Raum und Raumzeit betreffenden Abhandlung verwendet er die gleichen mathematischen Methoden. Allerdings werden die allgemeinen Voraussetzungen erheblich umfangreicher. Sie umfassen einen topologischen Punktraum, der im wesentlichen lokal kompakt ist und dem 2.Abzählbarkeitsaxiom genügt, sowie eine transitive Gruppe von Homöomorphismen, die in einer geeignet gewählten Topologie ebenfalls lokal kompakt und separabel, also auch metrisierbar ist. Schwerwiegender noch ist die beim Raumproblem bereits überflüssige, nun aber wieder notwendige Forderung einer Quasimetrik, die als reellwertige Funktion die räumlichen bzw.raumzeitlichen Abstandsstrukturen wiedergibt. Mit diesen Voraussetzungen ist das kombinierte Raum- Raumzeitproblem mathematisch auf einem Entwicklungsstand, der mit den Anfängen des Raumproblems vergleichbar ist.

Zudem sind die Grundbegriffe bei Freudenthal seinem Fachgebiet gemäß genuin mathematisch und topologisch so abstrakt, daß sie physikalisch schwerlich interpretiert werden können. Was soll z.B. das 2.Abzählbarkeitsaxiom der topologischen Gruppe physikalisch bedeuten? Hier tritt auf natürliche Weise der Unterschied zwischen einer mathematischen und einer physikalischen Theorie zu Tage. Mathematische Theorien sind weitgehend unabhängig von der Interpretation ihrer Grundbegriffe, während physikalische naturgemäß neben dem mathematischen Teil noch Interpretationsregeln für den Anwendungsbereich enthalten müssen. In dem Maße, wie wir die Raum- und Raumzeitgeometrie als Theorie

der Physik verstehen, wird eine angemessene Interpretation der Grundgrößen notwendig werden.

So haben wir es zum Ziel unserer Arbeit gemacht, ein physikalisch einfach zu interpretierendes Axiomensystem aufzustellen, aus dem die allgemeinen Voraussetzungen der Freudenthalschen Arbeit als Theoreme herleitbar sind. Wir stützten uns dabei auf eine Abhandlung von H.-J.Schmidt (1978), die das Raumproblem betrifft. Die Grundbegriffe wollen wir dabei aus dem Bereich wählen, der für die geometrische Anschauung und Vorstellung von Raum und Zeit experimentell leicht verfügbar ist - der raumzeitliche Bereich eines Labors.

Im allgemeinen sind jedoch auch die dabei allgemein üblichen Begriffe der Raum- und Raumzeitgeometrie, wie z.B.Punkt, Ereignis, Lichtsignal usw. nicht unmittelbar physikalisch interpretierbar. Selbst wenn man sich ein Ereignis durch hinreichend kleine Vorgänge, sozusagen durch "Vorgangsstellen" dargestellt denkt, fehlt immer noch eine physikalisch interpretierbare Explikation des Prädikats "hinreichend klein", das den Punktbegriff impliziert. Bei anderen Größen, wie z.B.Geraden, Trägheitsbahnen oder Lichtkegel, treffen wir auf analoge Schwierigkeiten. Diese Problematik versucht die sogenannte Protophysik, die auf H.Dingler (1928) und P.Lorenzen (1961,1978) zurückgeht, dadurch zu beheben, daß sie von einer handwerklichen Praxis ausgeht, die nicht mehr physikalisch erklärt werden soll. Nach bestimmten Herstellungsanweisungen werden "geometrische" Figuren konstruiert und unter anderem zu Meßgeräten zusammengebaut. Die Normen der Anweisungen werden mit gewissen Homoge-

nitätsprinzipien zu einem Axiomensystem zusammengefaßt, das mit der euklidischen Geometrie verglichen wird. Hierbei soll sich die erhoffte Euklidizität als natürliche Basis einer Theorie des Messens ergeben. Allerdings würde sich dabei die Gültigkeit der Geometrie auf die Gültigkeit der vorgegebenen Normen reduzieren, oder physikalisch allgemeiner - die Physik wäre nur mehr eine "Hochstilisierung" ([LOR 2]S.81) der handwerklichen Praxis. Dieser wissenschaftstheoretische Begründungsversuch ist deshalb mehrmals als inadäquat kritisiert worden (vgl.[BÖH],[SÜSS,2]). Wir beziehen uns daher in dieser Arbeit auf ein, wie wir glauben, physikalisch zutreffenderes Theorienkonzept. In jeder physikalischen Theorie gibt es gewisse Mengen, Relationen oder Funktionen, die unmittelbar oder durch Vortheorien physikalisch interpretiert werden können (empirische Grundbegriffe). Ihnen gegenüber stehen die sogenannten "theoretischen Terme", deren Interpretation und experimentelle Erfassung prinzipiell nur im Rahmen der Theorie gelingen kann. Wie weit dies möglich ist,d.h.in welchem Umfang die theoretischen Terme auf physikalisch interpretierbare Grundbegriffe zurückgeführt und explizit definiert werden können, hängt davon ab, in welcher axiomatischen Darstellung die Theorie vorliegt. Man wird, um der physikalischen Erkenntnis willen, bestrebt sein, die Grundbegriffe und Axiome so zu wählen, daß diese empirische Erklärung für alle Terme möglich ist. Die physikalische Theorie erscheint dann zwar als idealisiertes, aber doch unmittelbares Abbild der realen Strukturen ihres Anwendungsbereiches. Dieser mehr strukturalistische Standpunkt

ist im wesentlichen durch das Theorienkonzept von G.Ludwig ([LUD 3])geprägt worden, dem wir uns hiermit anschließen wollen.

Mit dem Prinzip der Reproduzierbarkeit können wir nun auf zwanglose Weise zu den Grundbegriffen unserer Axiomatisierung gelangen. Aus dem physikalischen Anwendungsbereich der Raumzeitgeometrie entnehmen wir dazu die Begriffe Vorgang, Teile von Vorgängen und Wiederholung von Vorgängen. In der mathematischen Theorie entsprechen den empirischen Konzepten die undefinierten Grundgrößen Prozess, $\sqsubset$ -Relation ("Inklusion") und Reproduktion (P, $\sqsubset$,R). Weder Punkte, Partikel, Trägheitsbahnen oder Lichtsignale noch räumliche, zeitliche oder kausale Relationen werden verwendet. Geometrisch lassen sich Prozesse durch beschränkte Gebiete des $\mathbb{R}^4$ und Reproduktionen durch Raumzeittransformationen darstellen. Für die räumliche Betrachtungsweise gilt eine analoge Darstellung durch Raumgebiete und Transporte im $\mathbb{R}^3$ (vgl.[SCH]). Zu der Struktur (P, $\sqsubset$,R) geben wir dann sechs Axiome an, die sowohl in der Raum-, als auch in der Raumzeitgeometrie physikalisch interpretiert werden können. Sie stützen sich auf Erfahrungstatsachen, die durch das Operieren mit Körpern, oder umfassender, durch das Wiederholen von Vorgängen vorweisbar sind.

Kehren wir schließlich zum konkreten Ziel unserer Arbeit zurück. Die idealisierten Voraussetzungen der Freudenthalschen Arbeit (1964) sollen als Konsequenzen der (P, $\sqsubset$,R)-Axiomatik abgeleitet werden. Mit dem Anschluß an die Freudenthalsche Arbeit gewinnen wir die gewünschte Klassifikation der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems und der pseudo-euklidischen und pseudo-

nichteuklidischen Geometrien des Poincaré-Einstein-Minkowskischen Raumzeitproblems.

1.2 Im II.Kapitel analysieren wir die empirischen bzw.theoretischen Konzepte: Vorgang bzw.Prozess und Wiederholung bzw.Reproduktion. Hierbei wird jede axiomatisch geforderte Eigenschaft durch Gedankenexperimente empirisch motiviert. Die Klasse der Vorgänge weist bezüglich der Teilvorgänge eine distributive Verbandsstruktur auf, die auf der Menge der Prozesse im Axiom 1 postuliert wird. Die Reproduktionen bilden eine Gruppe von Verbandsautomorphismen (Axiom 2), deren Invarianzstrukturen durch einen generalisierten Starrheitsbegriff (Quasistarrheit) festgelegt werden (Axiom 3). Damit kann die Gruppe auf natürliche Weise topologisiert werden. Mit dem gruppentopologischen Umgebungsbegriff definieren wir auf der Menge der Prozesse ein globales Vergleichskriterium, das in gleichmäßiger Weise für jeden Prozess eine obere Schranke seiner Ausdehnung angibt (Präuniformität). Damit kann man sinnvoll von immer kleiner werdenden Prozessen, also auch von Cauchy-Präfiltern sprechen. Nachdem mit Axiom 4 die Existenz solcher beliebig kleiner Prozesse in Verbindung mit einer endlichen Überdeckungseigenschaft garantiert wird, definieren wir mit minimalen Cauchy-Präfiltern die Ereignispunktmenge, die dabei zu einem vollständigen,uniformen Raum E mit den gewünschten topologischen Eigenschaften wird.

Prozesse lassen sich dann als offene, relativkompakte Umgebungen der Punkte darstellen, die als Cauchy-Präfilter diese Prozesse enthalten. Die Reproduktionen führen in kanonischer Weise zu uniformen Automorphismen auf E, die wieder eine topologische Gruppe $\tilde{R}$ bilden. $\tilde{R}$ läßt sich schließlich bezüglich ihrer zweiseitigen Uniformität vervollständigen ($\hat{R}$), wobei sie lokalkompakt, separabel und metrisierbar wird.

Der Zusammenhang des Ereignisraumes und die Transitivität der Gruppe wird durch das Axiom 5 gewährleistet, das im wesentlichen die Existenz einer Kettenverbindung zwischen zwei beliebigen Prozessen fordert. Zur theoretischen Konstruktion der Quasimetrik formulieren wir ein Anordnungsaxiom (Axiom 6) mit schon definierten Begriffen des Ereignisraumes und der Gruppe $\hat{R}$. Eine zentrale Rolle spielt dabei der sogenannte Isotropiekegel, der im Falle der Raumzeitgeometrie mit dem Lichtkegel zusammenfällt. Er zerlegt den Ereignisraum in mehrere Zusammenhangskomponenten, in denen das Anordnungsaxiom für eine lineare Ordnung der Abstandssphären sorgt. Mit weiteren topologischen Argumenten läßt sich eine Isotonie zwischen diesen Orbitmengen und den reellen Zahlen ableiten, aus der sich schließlich die Quasimetrik mit den geforderten Eigenschaften ergibt.

Das III.Kapitel enthält den formal-mathematischen Teil, in dem die erwähnten Strukturen und Theoreme aus den Axiomen abgeleitet und bewiesen werden. Den Anschluß an die Axiome von Freudenthal erläutern wir in IV.Kapitel. Dort geben wir zudem Beispiele für die klassifizierten Geometrien.

1.3 Zusammenfassung und Ausblick.

Die generelle Invarianzeigenschaft der Reproduktion (Quasistarrheit),die im Axiom 3 präzisiert ist, hat zur gemeinsamen Axiomatisierung der Raum- und Raumzeitgeometrie geführt. Die Quasistarrheit gestattete auch über die Topologisierung der Gruppe eine Präuniformität auf den Prozessen einzuführen. Damit lassen sich einige Fragen zur Struktur einer physikalischen Theorie untersuchen, die in [LUD 3] formuliert wurden. Aus der theoretischen Konstruktion der geometrischen Strukturen, wie zB. Ereignispunkte, Isotropiekegel, metrische Konzepte usw., folgt zunächst, daß sie sich im Prinzip auf Vorgänge und Wiederholungen zurückführen lassen. Als theoretische Terme sind sie dann durch Mengen von "physikalisch realen Sachverhalten" interpretierbar (vgl. [LUD 3] §1o.5). Die Präuniformität enthält dabei das zur Punktkonstruktion erforderliche,gleichmäßige Konvergenzkriterium. Zugleich impliziert sie eine vollständige Uniformität auf den Punkten, so daß der Ereignisraum zu einem in den Punkten homogenen Kontinuum wird. Schließlich folgt aus der Präuniformität eine natürliche Darstellung der bei Messungen auftretenden Unschärfemengen (vgl. [LUD 3] § 6). Sie ergeben,in der Theorie geeignet idealisiert, uniforme Strukturen, die bereits in der Uniformität des Ereignisraumes enthalten sind. Aus der Axiomatik läßt sich also ersehen, "auf welchen allgemeinen physikalischen Aussagen, d.h. physikalischen Gesetzen, die physikalische Theorie beruht" ([LUD 3] § 7.3; Vorteile einer axiomatischen Basis). Diese Punkte wurden für die speziell relativistische Raumzeit noch nicht untersucht.

Die topologischen und gruppentheoretischen Voraussetzungen, die in der Freudenthalschen Arbeit die Differenzierbarkeitsstrukturen implizierten, sind jetzt auf physikalisch interpretierbare Grundbegriffe und Axiome zurückgeführt worden. In dieser Richtung lassen sich Beiträge zur Bewältigung des Differenzierbarkeitsproblems der Mechanik (vgl. [LUD 1] VII, § 5) erwarten.

Bei einer schwächeren Fassung des Reproduzierbarkeitsprinzips kann mit einer erheblichen Verallgemeinerung des Raumzeitproblems gerechnet werden. Mit der vorliegenden Form sind Reproduktionen von (lokalen) Prozessen verträglich. Läßt man dagegen nur die Reproduktion von "Prozess- Stellen" zu, deren infinitesimale Struktur auf geeignete Weise aus dem Prozessbegriff abzuleiten wäre, dann sind auch allgemeinere Raumzeitmodelle denkbar. Als Lösung dieses generalisierten Raumzeitproblems wären die Riemannschen Raumzeit - Mannigfaltigkeiten eine adäquate Beschreibung der durch das Kausalprinzip geprägten Vorstellungen von Raum und Zeit.

II. Die konstruktiv-axiomatische Charakterisierung der Vorgangswelt.

1. Starrheit, Trägheit und Reproduzierbarkeit

1.1 Das Riemann-Helmholtz-Liesche Raumproblem

In dem schon von antiken Geometern und Philosophen diskutierten Paralellenproblem Euklids zeichnete sich ein gewisser Abschluß ab, als 1854 B.Riemann, nach Vorarbeiten von C. F.Gauß, J.Bolyai und N.Lobatschewskij, seine epochemachende Habilitationsschrift "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" vortrug, die posthum 1867 von R.Dedekind veröffentlicht wurde. [1] Welchen Einfluß Riemanns Vorstellungen auf die mathematische Physik hatten, wird durch die berühmte Abhandlung von H.v.Helmholtz "Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen"belegt, die kurz darauf im Jahr 1868 erschienen ist. Helmholtz wollte wohl mit seiner Titelwahl deutlich machen, daß er seinen Ansatz als eine empirische Begründung der Riemannschen Metrikhypothese verstand. Insbesondere betonte er, daß die Annahme einer Metrik bereits einen Kongruenzbegriff für starre Körper voraussetzt. Andernfalls wäre ein Vergleich von Maßen an verschiedenen Orten in Frage gestellt. In Wirklichkeit sei deshalb nicht die Riemannsche Maßbestimmung, sondern die Kongruenz von starren Körpern das Primäre,

---

1) Es gelang,genau genommen, erst 1868 E.Beltrami und F.Klein Modelle der nicht-euklidischen Geometrie in euklidischen Termen so zu beschreiben, daß die Widerspruchsfreiheit der nicht-euklidischen auf die euklidische Geometrie zurückgeführt werden konnte.

das dann auch in der Helmholtzschen Analyse die pythagoräische Maßbestimmung impliziert. Natürlich ist dieser Einwand nicht voll zu rechtfertigen, denn bekanntlich erfordert eine Metrik nur eindimensionale, starre "Körper", wie z.B.straffgespannte, dehnungsfreie Fäden, und mehr ist auch zur Riemannschen Metrik nicht nötig.So wurden die Vorstellungen Riemanns zum breiten Fundament der physikalischen Raumzeitgeometrie, in der sich die Helmholtzsche Analyse auf die dem starren Körper adäquate Klassifizierung der konstant gekrümmten Räume spezialisierte [1]. Später dann rundete S.Lie (1890) mit einer mathematisch präzisen Explikation der kontinuierlichen Gruppe, die bei Helmholtz stets implizit, aber doch lückenhaft, vorhanden war, ein Fragengebiet ab, das nun seit langem als Riemann-Helmholtz-Liesches Raumproblem bekannt ist.

Mit der Kongruenzrelation "Congruent sind solche Punctpaare, welche gleichzeitig oder nacheinander mit demselben Punctpaare des Raumes zusammenfallen" gewinnt Helmholtz die Starrheit seiner "in sich festen Körper" [HEL] dadurch, daß er eine Funktion für kongruente Punktepaare postuliert, die bei allen Bewegungen invariant bleibt. Die Gruppe erscheint dann als Invarianzgruppe dieser Funktion, die sich später im Infinitesimalen als die pythagoräische Metrik erweist. Nachdem Lie seinen präzisierten Gruppenbegriff hinzufügte und damit die Eigenschaf-

---

1) Riemanns Überlegungen weisen denn auch weit ins 20.Jahrhundert, als er in seinem Vortrag wichtige Vorstellungen der Einsteinschen Gravitationstheorie vorwegnahm:
"Es muß also entweder das dem Raum zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden". (vgl. [WEY 2])

ten der Bewegungsgruppe ausreichend kennzeichnen konnte, wurde im Laufe der Entwicklung des Raumproblems nur noch der Starrheitsbegriff verschieden expliziert. In den "Grundlagen der Geometrie" (1902) grenzte sich bereits D.Hilbert deutlich von den Helmholtzschen Festkörpern ab und führte - allerdings auf die Zahlenebene [1] beschränkt - einen abstrakteren Starrheitsbegriff ein: Können drei Punkte durch Bewegung beliebig nahe (bzgl.der gewöhnlichen Topologie) an drei andere Punkte gebracht werden, dann können sie auch exakt in die drei anderen Punkte übergeführt werden. Diese Forderung, die das 3.Hilbertsche Axiom umschreibt(vgl.Kap.IV),impliziert neben der topologischen Abgeschlossenheit der Bewegungsgruppe eine globale Festigkeit in der Zahlenebene, die besonders in der Folgerung, daß je zwei Punkte durch Bewegungen niemals in beliebige Nähe zueinander geraten können, deutlich wird ([HIL] , Anhang IV). Offenbar sind dann z.B.Dilatationen wie auch die Lorentzschen Raumzeittransformationen ausgeschlossen (letztere erstaunlicherweise aber nicht durch das Helmholtzsche Starrheitsaxiom, vgl.§1.2).

Nach zahleichen Änderungen und neuen Ansätzen, wie z.B. von H.Weyl (1923), A.N.Kolmogorov (1930) und H.Busemann (1941, 1942) (zur Literatur vgl. [FRE1] 1956) haben J.Tits (1955) und H.Freudenthal (1956) das Raumproblem zu einem gewissen Abschluß gebracht. Sie haben erstmals, ohne Differenzierbarkeitsannahmen oder eine Metrik vorauszusetzen, die Lie-Eigenschaft der Bewegungsgruppe mit topologischen und gruppentheoretischen Ar-

---

1) Sowohl Helmholtz als auch Hilbert hatten sich gegen den Einwand eines circulus vitiosus zur Wehr zu setzen. Zahlreiche Zeitgenossen waren der Meinung, in der Zahlenmannigfaltigkeit sei bereits die volle Geometrie enthalten, obwohl G.Cantor und R.Dedekind bereits 1872 das Zahlenkontinuum geometriefrei definiert hatten([CAN] , [DED] , vgl.auch [FRE1]).

gumenten hergeleitet. Im Beweisgang wurde dabei an entscheidender Stelle das Theorem von H.Yamabe (1953) verwendet, das offenbar eine solche Charakterisierung der Differenzierbarkeitsstruktur erst ermöglichte. Freudenthal vereinfachte dann die Titssche Herleitung und klassifizierte mit Lie-algebraischen Methoden die entsprechenden Raumgeometrien. Er kennzeichnet dabei die dehnungsfreie Bewegung durch eine sehr anschauliche"topologische Starrheit", die kurz folgendes postuliert: Zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen (des betrachteten topologischen Raumes) existiert eine offene Menge, die bei allen Bewegungen niemals zugleich die beiden Teilmengen treffen kann. Diese Forderung ist im wesentlichen zu der Kolmogorovschen oder Titsschen uniformen Invarianzeigenschaft der Bewegungsgruppe äquivalent. Die maximale Mobilität der Bewegungsgruppe erhält Freudenthal aus seinem Zerlegbarkeitsaxiom (Z). Er fordert, daß ein Orbit der Standuntergruppe eines beliebigen Punktes den topologischen Raum in zwei nicht zusammenhängende Teilmengen zerlegt. Im euklidischen Raum kann der Orbit als Kugeloberfläche dargestellt werden, die durch Anwendung der Drehgruppe (Standuntergruppe) auf einen Punkt erzeugt wird. Offenbar läßt sich das abgeschlossene Kontinuum der Fläche und ihre Zerlegbarkeitseigenschaft nur mit einer gewissen Reichhaltigkeit der Bewegungsgruppe erzeugen, was gewöhnlich mit "freier Beweglichkeit" (max.Mobilität) abgekürzt wird. Schließlich widmete sich in jüngster Zeit H.-J.Schmidt (1978) erneut dem Raumproblem, wobei er, mehr von den physikalischen Grundlagenfragen ausgehend, einer von G.Ludwig ([LUD 1], IV) vorgeschlagenen Idee folgte und von Raumgebieten und Transporten als undefinierten Grundbegriffen ausging. Schmidt forderte dabei ein dem

Freudenthalschen Postulat eng verwandtes Starrheitsaxiom, das zu jedem Raumgebiet a ein kleines Teilgebiet b fordert, welches bei allen Transporten τ mit $\tau b \cap b \neq \emptyset$ im Raumgebiet a verbleibt. Mit wenig anderen Axiomen konstruiert Schmidt dann aus den Raumgebieten eine vollständige Punktmenge (Kontinuum), auf der die von den Transporten implizierte, topologische Bewegungsgruppe so operiert, daß die Freudenthalschen Voraussetzungen erfüllt sind. Diese grundlagenphysikalische Analyse stellt den Ausgangspunkt unserer Charakterisierung dar.

Allen Arbeiten gemeinsam ist das bekannte Ergebnis - die Auszeichnung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien konstanter Krümmung und globaler Isotropie als adäquate Räume der freien Beweglichkeit von starren Körpern. Dabei tritt in allen Analysen die zwar verschieden formulierte, aber stets entscheidende Relation der Starrheit auf, deren Invarianzeigenschaft die Mobilität der Bewegungsgruppe charakterisiert. Sehen wir jetzt einmal von der Einschränkung auf das Räumliche ab und betrachten den Transport eines Raumgebietes (bzw.Punktes) als einen im Sinne der uneingeschränkten Beweglichkeit beliebig wiederholbaren Vorgang, dann wird bereits hier das Prinzip der Reproduzierbarkeit relevant. Beim Raumzeitproblem begegnen wir dem Begriff in seiner natürlichen Bedeutung. Die hier auftretenden, allgemeinen Starrheitskonzepte - durch Lichtsignale oder Trägheitsbahnen physikalisch realistisch formuliert - sind die charakterisierenden Invarianzeigenschaften der raumzeitlichen Bewegungsgruppe. In unserer Charakterisierung werden diese Raumzeitstrukturen allein aus der Reproduzierbarkeit von Prozessen hergeleitet.

1.2 Das Poincaré-Einstein-Minkowskische Raumzeitproblem

Das auf die Begründung der speziellen Relativitätstheorie durch Poincaré, Einstein und Minkowski zurückgehende Raumzeitproblem begann etwa ab 1904. Zu dieser Zeit hatte H.A.Lorentz nachgewiesen, daß die Maxwellschen Gleichungen - allerdings auf den ladungsfreien Raum beschränkt - bezüglich der nach ihm benannten Gruppe invariant sind. Die erste exakte Formulierung dieser Invarianz stammt dann von H.Poincaré (1905). Er korrigierte die bei Lorentz unrichtigen Transformationsterme für die Ladungsdichte und Geschwindigkeit und erhielt dadurch die vollständige Kovarianz der elektromagnetischen Feldgleichungen. A.Einstein setzte schließlich mit seiner bekannten Abhandlung "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (1905), die fast gleichzeitig mit der poincaréschen Arbeit eingereicht worden ist, einen Abschluß in der Grundlegung der speziellen Relativitätstheorie. Mit dem sogenannten Relativitätspostulat und dem Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit begründeten Poincaré und Einstein eine völlig andere und physikalisch revolutionäre Auffassung von Raum und Zeit. Geht man mathematisch noch einen Schritt weiter und betrachtet die spezielle Relativitätstheorie als Invariantentheorie der Lorentz-Gruppe, dann sind zum Raumzeitproblem vor allem die Arbeiten von H.Minkowski (1907,1915) hinzuzufügen. Minkowski erzielte mit der Quasimetrik des Ereignisabstandes eine natürliche Geometrisierung der Relativitätstheorie, so daß seitdem von einer (speziellen) Raumzeitgeometrie gesprochen werden darf, die eine weitgehende Ähnlichkeit mit der euklidischen Geometrie besitzt.

An diese Grundlegung schließt dann eine bis heute fortzusetzende Reihe von Axiomatisierungen der speziell relativisti-

schen Raumzeitgeometrien an. Als einer der Ersten ist wohl W.v.Ignatowsky (1910) hervorgetreten, der unter plausiblen Linearitätsannahmen eine Herleitung der Poincaré-Gruppe allein aus Symmetrie-und Relativitätsannahmen formulierte. Diese Richtung reicht bis zu G.Süßmann (1969), dessen Herleitung erheblich einfacher ist und der ein besonderes von Ignatowsky benütztes experimentelles Faktum durch ein einfaches Anordnungsaxiom ersetzt. Ausdrücklich zu zitieren sind dazu noch die Arbeiten von E.C.Zeeman (1963) und H.J.Borchers und G.C.Hegerfeldt (1972). Zeeman zeigt die Übereinstimmung der Poincaré-Gruppe(plus Dilatationsgruppe) mit der minskowskisch-kausalen Automorphismengruppe, während Borchers und Hegerfeldt die Linearitätsstruktur mit einer bis heute nicht mehr überbotenen Einfachheit auf Annahmen über Licht- oder Trägheitsbahnen zurückführen.

Erstaunlicherweise muß zu dieser Reihe von Axiomatisierungen, die sich alle durch ein gewisses Niveau in den mathematischen Voraussetzungen, wie z.B.ein Raumzeitkontinuum, lineare Transformationsfunktionen, usw., auszeichnen lassen, auch die Helmholtzsche Abhandlung (1868) hinzugefügt werden. Ursprünglich nämlich formulierte Helmholtz in seinem Starrheitspostulat einen offensichtlich unbemerkten und erheblich allgemeineren Standpunkt. Sein 2.Axiom "Zwischen den 2 n Coordinaten eines jeden Punctpaares, welches einem in sich festen Körper angehört, besteht eine von der Bewegung des letzteren unabhängige Gleichung, welche für alle congruenten Punctpaare die gleiche ist" legt nichts über die Definitheit oder Indefi-

nitheit der Form (bzw.Metrik) fest, die mit der postulierten Gleichung intendiert war. Offenbar sind dann nicht nur Räume mit definiter, sondern auch Geometrien mit indefiniter Metrik, wie die der speziellen Relativitätstheorie, mögliche Kandidaten, die als Lösung des so erweiterten Raumproblems in Frage kommen[1]. Diese physikalisch bemerkenswerte Erweiterung blieb dennoch erstaunlich lange ohne nennenswerte Konsequenzen, vermutlich weil, wie später Freudenthal (1964) betont, die gruppentheoretische Klassifikation der Poincaré-Einstein-Minkowskischen Raumzeitgeometrien wesentlich schwieriger ist als die entsprechende Kennzeichnung der Raumgeometrien.

Eine andere, mehr zur axiomatischen Methode tendierende Richtung wurde 1914 von A.A.Robb eingeleitet. Er formulierte ein recht umfangreiches und mehr an der mathematischen Zielsetzung orientiertes Postulatensystem, das auf der Basis von undefinierten Elementen ("events") und einer zeitlichen "Vor - Nach" -Relation aufgebaut ist. Dieser erste Versuch ist allerdings noch ziemlich unübersichtlich und wird später auch von Weyl in seinen spanischen Vorlesungen als "sehr umständliches und künstliches Axiomensystem" erwähnt ([WEY 1] S.8).

Eine physikalisch zutreffendere Position stellt dann H. Reichenbach in seiner "Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre" (1922) vor. Er beginnt mit einer Menge von undefinierten "Realpunkten", von denen Signale abgegeben und re-

---

1) Neben dieser Erweiterung hat Helmholtz zunächst auch die hyperbolische Geometrie übersehen, deren Realisierung in den Räumen von konstanter negativer Krümmung im selben Jahr von E. Beltrami entdeckt worden war. Etwas detaillierter bespricht Weyl in seinen spanischen Vorlesungen die verschiedenen Lücken der Helmholtzschen Analyse.

flektiert werden können, die dadurch zu Ereignissen werden. Nach der axiomatischen Einführung von Lichtsignalen wird ihnen mit den sogenannten Lichtaxiomen eine gewisse Starrheit aufgeprägt, welche die Streckengleichheit und Kongruenz impliziert. Über diese dem Körperbegriff entliehene Starrheit ist sich Reichenbach in der Tat im Klaren gewesen, identifiziert er doch an späterer Stelle die"Körperstarrheit" mit der "Lichtstarrheit" (vgl.das Körperaxiom VII).

Der körperliche Starrheitsbegriff erscheint dagegen noch bei der Einsteinschen Lichtuhr. Hierbei handelt es sich um ein stilisiertes Uhrenmodell, das aus zwei gegenüber gestellten, starr verbundenen Spiegeln besteht, die ein Lichtsignal dann periodisch hin- und herreflektieren. Auf diese Zurückführung der Periodizität auf starre Körper hat später H.Weyl in "Raum, Zeit und Materie" hingewiesen ([WEY 2] , S.172 f). Als Alternative schlug er "Atomuhren", wie z.B.Wasserstoffatome, vor, deren Perioden an den emittierten Frequenzen abgelesen werden können. Weyl bemerkt ausdrücklich, daß zwei nebeneinander ruhende Wasserstoffatome mit großer Genauigkeit die gleichen Spektrallinien aufweisen, "wie verschieden auch ihre Geschichte gewesen sein mag". Solche Uhren können nur mehr Stand-, aber keine Gangdifferenzen aufweisen, so daß Weyl definiert:"Eine Uhr besitzt immer wieder, wenn sie in einem berechtigten Bezugsraum zur Ruhe gekommen ist, dieselbe Eigenperiode" (kein "second clock effect", vgl. [EHL]). Betrachtet man eine Uhr als Wiederholung von Vorgängen, dann ist in der Weylschen Festlegung im wesentlichen das Prinzip der Reproduzierbarkeit zum Ausdruck gekommen.

Vor nicht langer Zeit hat J.W.Schutz (1973) eine andere Begründung der speziellen Relativitätstheorie veröffentlicht, die auf Arbeiten von A.G.Walker (1948) und G.Szekeres (1968) aufbaut. Ausgehend von Partikeln und Signalen, die physikalisch als Trägheitsbahnen und Lichtsignale interpretiert werden, erhält er nach der Definition einer zeitlichen Ordnungsrelation (Kausalstruktur) und einer Reihe von kinematischen Axiomen die pseudo-euklidische (flache) Raumzeit Minkowskis. Hierbei sind die Trägheitsbahnen und Lichtsignale wieder die charakterisierenden Invarianten der raumzeitlichen Bewegungsgruppe, sozusagen das raumzeitliche Analogon der nur räumlichen Starrheit. Daß die starren Etalons, wie Maßstäbe und Uhren, sehr leicht auf die Inertialität und Lichtsteifheit zurückgeführt werden kann, wird recht anschaulich an einem Beispiel von J.Ehlers (1973) erläutert. Ausgehend von den Trägheitsbahnen freifallender Partikel vergleicht Ehlers zwei Partikel auf stückweise parallelen Fallkurven mit den Enden eines starren Maßstabes. Hier wird, dem Weylschen Führungsfeld gemäß, das abstrakt Starre auf das physikalisch Inertiale reduziert. Zudem erzeugen die beiden Partikel eine Lichtuhr, wenn ein Lichtsignal zwischen ihnen hin- und herreflektiert wird.Ihre Periodizität ist dann eine simple Konsequenz der intertialen und luminaren Starrheit.

Zusammenfassend können wir also die bei allen Axiomatisierungen zentralen Begriffe der Kongruenz, Starrheit, Lichtsteifheit und Trägheit als kennzeichnende Invarianzeigenschaften der Reproduzierbarkeit verstehen. Dieses Prinzip wird damit zum grundlegenden Ausgangspunkt unserer, die Riemann-Helm-

holtz-Lieschen Raumgeometrien und die Poincaré-Einstein-Minkowskischen Raumzeitgeometrie gleicherweise umfassenden Axiomatisierung. Wir sehen in der Wahl der Grundbegriffe - Prozess und Reproduktion - also ohne Unterstützung von räumlichen oder zeitlichen Maßbegriffen (Meßstäbe, Uhren), eine adäquate Behandlung der relativistisch vereinten Raumzeit [1]. Zudem gewährleistet die physikalische Realität, die hinter den Grundbegriffen und Axiomen steht, eine Interpretation, in der die theoretischen Begriffe, wie z.B.Ereignis oder Ereignisabstand, auf physikalisch wirkliche Sachverhalte zurückgeführt werden können (vgl. [LUD 3] § 10.5).

Die Verbindung zwischen den geometrischen Strukturen der Raumzeit und der Reproduzierbarkeit war seit langem bekannt und ist bereits 1918 von A.Einstein an einem fundamentalen Tatbestand der Makrophysik erörtert worden. Unter gewissen Vorsichtsmaßnahmen ist es stets möglich, Einheitsmaßstäbe, Einheitsuhren usw. zu definieren, die einmal zueinander geeicht, jederzeit und überall diese relative Eichung bewahren. Allgemein wird das Prinzip der Reproduzierbarkeit mit dem "Naturgesetz" verglichen, nachdem die im irdisch Lokalen festgestellten Gesetzmässigkeiten auf das kosmisch Globale erweitert werden dürfen. Offenbar ist diese Annahme die konservative Bedingung der leichten Möglichkeit [2], Physik als Wissenschaft zu betreiben.(wie

---

1) Daß zugleich das Raumproblem mitbehandelt wird, deuten wir als die im Sinne der Substruktur enge Verwandschaft des Raumes mit der speziell relativistischen Raumzeit. Ob eine analog nahe Strukturverbindung zur galileischen Raum-Zeit existiert, bleibt eine offene Frage.

2) In einer Weyl-Geometrie (vgl. [WEY 2])gilt dieses Prinzip nicht mehr. Dort kann z.B.die Periode einer Uhr an einem Ort davon abhängen, auf welchem Weg sie dort hintransportiert worden ist (secon clock effect). Allerdings wird von den meisten Physikern die konservative Annahme der Reproduzierbarkeit aus Einfachheitsgründen vorgezogen. Immerhin untersuchte P.A.M.Dirac (1973) die Weylsche Theorie im Zusammenhang mit der Hypothese einer variablen

auch umgekehrt eine wissenschaftliche Physik quasi per definitionem die Auszeichnung einer bestimmen Klasse von Geometrien zur zutreffenden Beschreibung der Vorgangswelt nach sich zieht).

Zur Charakterisierung der Vorgangswelt wählen wir deshalb als Grundbegriffe die Vorgangswiederholung bzw., als ihr Abstraktum, die Reproduktion sowie den physikalischen Vorgang bzw. den Prozess, letzteren als diejenige undefinierte Grundgrösse, aus der sich der Operationsbereich der Reproduktion zusammensetzt. Weder Partikel, starre Körper (Maßstäbe), Trägheitsbahnen und Lichtsignale (Uhren) noch kausale Relationen werden verwendet (vgl.z.B.Kronheimer und R.Penrose (1967)). Ein realer Vorgang wird zum undefinierten Element "Prozess" abstrahiert, das geometrisch interpretiert einem Raumzeit-Gebiet entspricht. Prozesse tragen demnach keine von Partikelbahnen herrührenden Substrukturen. Weil Prozesse zwar nicht im euklidischen, aber doch im bolyaischen Sinn starre Figuren sind, entdecken wir das Starrheitskonzep in einer generalisierten Form wieder und verwenden es zur axiomatischen Charakterisierung der Reproduktion. Darin liegt auch der Grund, warum die traditionelle Körperstarrheit als Spezialfall erscheint und weshalb die Geometrien des Raumproblems in unserem Axiomensystem enthalten sind.

Abschließend kehren wir nochmals zu unserem Ausgangspunkt zurück. Wie wir erwähnt haben,blieb die bei Helmholtz auftretende mehr zufällige Erweiterung auf indefinite Formen lange Zeit unbeachtet, bis sie erstmals von H.Freudenthal (1964) aufgegriffen wurde. Mit einschneidenden topologischen Voraussetzungen an den Raum und der darauf operierenden Gruppe gelang es ihm,

die Klasse der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien des Raumproblems sowie der pseudo-euklidischen und pseudo-nichteuklidischen Geometrien des Raumzeitproblems auszuzeichnen. In seiner Arbeit unterscheidet Freudenthal zwischen Axiomen und allgemeinen Voraussetzungen ([FRE 2], Kap.0.2), die wir hier wiederholen wollen:

1.2.1 Allgemeine Voraussetzungen:

(i) X ist ein lokal kompakter, zusammenhängender, separabel metrisierbarer [1] Raum.

(ii) G ist eine transitive Gruppe von Homöomorphismen von X, die - im Sinne der stetigen Konvergenz topologisiert - lokal kompakt und separabel metrisierbar [1] ist.

(iii) ρ ist eine stetige reellwertige Funktion der Punktepaare von X (die Quasimetrik), mit

$$\rho(x,x) = 0 \text{ und } \rho(gx, gy) = \rho(x,y)$$

für alle $g \in G$.

Ziel unserer Arbeit ist es, aus dem Prinzip der Reproduzierbarkeit von Prozessen und einer darauf aufbauenden Axiomatisierung diese allgemeinen Voraussetzungen als Sätze herzuleiten. Mit den eigentlichen "Axiomen" von Freudenthal, deren Herleitung einer späteren Arbeit vorbehalten wird, können wir dann die erwähnte Klassifizierung der Geometrien übernehmen. Freuden-

---

1) Die Abkürzung "separabel metrisierbar" bedeutet natürlich separabel und metrisierbar. In Verbindung mit der Lokalkompaktheit folgt die Metrisierbarkeit bereits aus dem 2.Abzählbarkeitsaxiom (Separabilität).

thal selbst bewertet seine Arbeit als einen "reichlich unbefriedigenden Versuch, einen weiteren Rahmen zu finden, in den auch die pseudo-euklidischen und pseudo-nichteuklidischen Geometrien passen". Die Schwierigkeit bestand darin: "Wie verallgemeinert man aber zweckmäßig Metriken, die von einer indefiniten quadratischen Form verursacht werden?" Mit der hier vorgelegten Analyse ist ein Schritt in Richtung dieser Begründungsproblematik unternommen worden.

2. Prozesse und Reproduktionen - Grundbegriffe

2.1 Vorgang und Prozess

Jeder materielle Gegenstand stellt in seinem Zustand der Ruhe oder Bewegung, seiner raumzeitlichen Existenz, einen Vorgang dar. Der naiven Intuition zufolge scheint das durch den Körper ausgefüllte Räumliche, also der Raumbegriff, das unserer Erfahrung ursprünglich Gegebene zu sein. Das Erkennen eines Raumgebietes ist jedoch ein Akt (und wohl selbst ein Vorgang), der wesentlich von der Unveränderlichkeit der Körperform abhängt - oder anders: Was wir erkennen, hat sich nicht beliebig rasch verwandelt. Demzufolge wäre der Raumbegriff bereits eine Abstraktion der sich in Wirklichkeit vollziehenden Erfahrung von Vorgängen, ungeachtet dessen, daß zur Erklärung eine Zerlegung in Raum- und Zeitschnitte vorgezogen wird.

Physikalische Beispiele von Vorgängen sind Maßstäbe, Uhren, feste flüssige oder gasförmige Körper, aber auch physikalische Felder oder chemische Reaktionen. Als mathematisches Bild eines Vorganges führen wir das undefinierte Element Prozess ein, und idealisieren die Klasse der Vorgänge zu einer nichtleeren Menge P, deren Elemente Prozesse heißen sollen.

Jede Zelle eines Baumes, aber auch seine verschiedenen Entwicklungsstadien sind als Vorgang Teile eines umfassenderen Vorganges, der dem gesamten Sein des Baumes entspricht. Dieser Teilstruktur entsprechend führen wir auf P eine zweistellige

Relation " $\sqsubset$ " ein, die zur Charakterisierung der Inklusionsvorstellung die folgenden empirisch plausiblen Eigenschaften aufweist: Sie ist reflexiv, transitiv und extensiv; d.h. aus $a \sqsubset b$ und $b \sqsubset a$ folgt $a = b$. Alle diese formal idealisierten Eigenschaften können unmittelbar an realen Vorgängen abgelesen werden. Vom Mischen bei Flüssigkeiten und Gasen ist bekannt, daß verschiedene Vorgänge gemeinsame Teile besitzen können. Interpretiert man diese Vorstellung auf der theoretischen Ebene als den bezüglich seiner Teile umfangreichsten Prozess, den zwei Prozesse a und b als Teilprozess gemeinsam haben, dann führt dies zur Annahme eines Infimums $a \sqcap b$ und, in Analogie zur Vereinigung eines Supremums $a \sqcup b$, d.h.die Vorgangswelt enthält die Struktur eines Verbandes. Aus ähnlichen Überlegungen folgt dann auch die Distributivität der Verbandsstruktur.

2.1.1 Axiom 1: $(P, \sqsubset)$ ist ein abzählbar unendlicher und distributiver Verband mit kleinstem Element 0.

Die postulierte Abzählbarkeit der Prozessmenge folgt aus der üblichen Idealisierung der stets nur endlich vielen, vorweisbaren Vorgänge.

2.2 Wiederholung und Reproduktion

Etwas mehr Abstraktion erfordert die formale Fassung der Prozessreproduktion. Das Prinzip der Reproduzierbarkeit soll in der hier verwendeten (absoluten) Form erlauben, daß unter bestimmten experimentellen Vorsichtsmaßnahmen Vorgänge auf gleiche

Weise so wiederholt werden können, daß sie in ihren experimentellen Ergebnissen übereinstimmen. Dieses unter hinreichender Raumzeithomogenität physikalisch realisierbare Postulat soll kurz erläutert werden. Dazu denken wir uns ein bestimmtes Experiment nach gleicher Vorschrift auf einem Labortisch und auf einer dazu bewegten Unterlage (z.B.einer rollenden Plattform, einem Fließband), der sogenannten Vorgangsbasis, ausgeführt. Es ist dann eine allgemeine Erfahrungstatsache (galileisches Trägheitsgesetz), daß bei entsprechender Vorsicht in der Basiswahl alle Versuchsabläufe und Ergebnisse übereinstimmen, d.h. die beiden Vorgänge dürfen als äquivalent angesehen werden. Diese Situation werden wir später an einem detaillierteren Laborbeispiel näher erläutern.

Die individuelle Wiederholung kann nun auf mehrere Vorgänge erweitert werden. Dabei entstehen Vorgangspaare, die alle äquivalent, d.h.durch die gleiche Wiederholungsvorschrift klassifiziert sind. Auf der theoretischen Ebene der Prozesse wird diese Äquivalenzklassenbildung per Idealisierung so totalisiert, daß dadurch die Reproduktion zur Bijektion auf der Prozessmenge wird. Natürlich impliziert diese globale Erweiterung der auf individuelle Vorgänge bezogenen Wiederholung eine wichtige Homogenitätsbedingung, die vordergründig allgemeinere Raumzeitgeometrien (etwa nicht konstanter Krümmung) auszuschliessen scheint. Bei genauerer Betrachtung spiegelt diese Idealisierung lediglich den in der Physik nicht so gravierenden Übergang von der lokalen zur globalen Isotropie[1)] wieder. Der viel tiefer-

1) Hiermit wird z.B.auf den Unterschied zwischen Torus und euklidischem Raum hingewiesen. Der erste ist lokal, der zweite ist global isotrop, beide sind aber konstant gekrümmt (flach).

gehende Strukturwandel beim Wechsel vom Lokalen zum Infinitesimalen - und nur dadurch könnten variabel gekrümmte Riemannsche Mannigfaltigkeiten entstehen - war mit der Wahl nichtinfinitesimaler, lokaler Prozesselemente von Anfang an ausgeschlossen.

Ein weiterer Aspekt ist noch bei der Theoretisierung der Wiederholung anzumerken. Die bei der Wiederholung gewünschte Übereinstimmung mit dem Ausgangsvorgang war nur unter gewissen Vorsichtsmaßnahmen gewährleistet. Bekanntlich verläuft ein Vorgang auf einer beschleunigten Vorgangsbasis in der Regel anders als auf einer dazu ruhenden Basis. Diese Änderung macht sich in realen Vorgängen dadurch bemerkbar, daß gewisse Teilvorgänge des ursprünglichen Vorgangs nicht mehr als Teile des wiederholten Vorgangs erscheinen. Ein eindrucksvolles Beispiel liefern die im Vergleich mit unseren irdischen Vorgängen phantastisch anmutenden Schwebevorgänge in schwerefreien Raumkapseln. Offenbar ist es also zur theoretischen Charakterisierung und Identifizierung einer dem vorangestellten Prinzip gehorchenden "Reproduktion" notwendig, daß sie die verbandstheoretische Ordnungsrelation invariant läßt[1].

Solche Wiederholungen, die den erläuterten Spezifizierungen genügen, wollen wir in der mathematischen Theorie als Reproduktionen bezeichnen. Der reproduzierte Prozess ist demnach das Reproduktionsbild des ursprünglichen Prozesses. Führt man in dem

---

1) In einer Vortheorie zu Prozessen und Reproduktionen, die von Vorgängen, Vorgangsbasen und Wiederholungen ausgeht, wird diese Invarianz durch eine Äquivalenzklassenbildung erreicht. Erst dann ist der im folgenden zentrale Begriff der Quasistarrheit formulierbar.

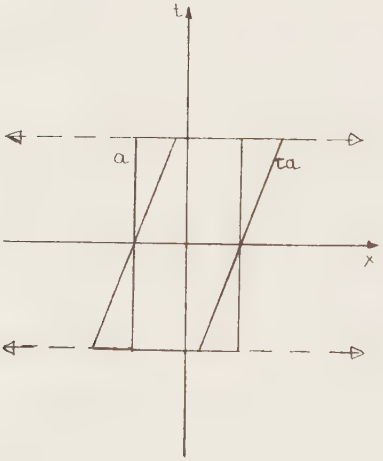
bisher präzisierten Sinn Vorgangswiederholungen durch, dann ergibt die experimentelle Hintereinanderausführung von zwei Wiederholungen aufs neue eine Wiederholung, d.h.die Reproduktionen sollen eine Gruppe bilden. Bezeichnen wir mit R eine Teilmenge aus der Potenzmenge von $P \times P$, deren Elemente Reproduktionen heissen, dann können wir die bisherigen Feststellungen in dem folgenden Axiom zusammenfassen.

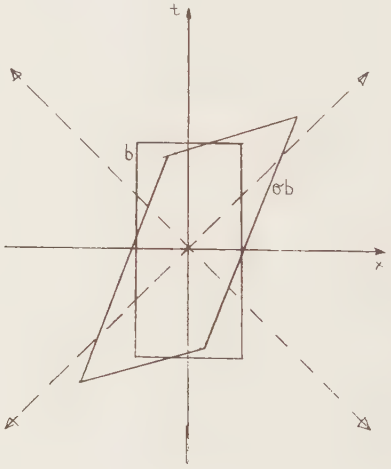
2.2.1 Axiom 2: R ist eine Untergruppe der Verbandsautomorphismen von $(P, \sqsubset)$.

3. Prozesse und Reproduktionen - Eigenschaften

3.1 Lokale Charakterisierung

Bei einer Reproduktion bleibt die euklidische Figur eines Prozesses nicht erhalten. Die folgenden Abbildungen zeigen diesen Sachverhalt jeweils an einer (stilisierten) Galilei - ($a \mapsto \tau a$) bzw.Lorentztransformation ($b \mapsto \sigma b$):





Die unbeschrifteten Pfeile sollen andeuten, daß in diesen Richtungen ein Prozess (durch Schübe) über alle Grenzen modifiziert werden kann[1)]. Mathematisch kommt dies in der Nichtkompaktheit

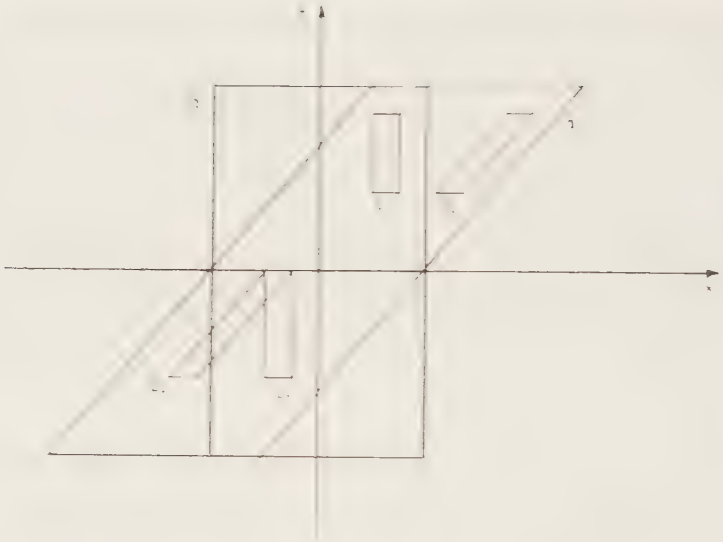
1) Diese Richtungsstruktur wird später (vgl.3.2) zur Definition des Isotropiekegels verwendet. Er ist die Menge aller Punkte mit quasi-metrischem Nullabstand.

der homogenen Galilei - bzw.Lorentzgruppe zum Ausdruck, wogegen die dazu analoge Gruppe aller Raumdrehungen kompakt ist (kompakte versus nichtkompakte Reproduzierbarkeit). Jede der Gruppen operiert jedoch in ihrer "Eigen"-Geometrie starr, d.h. Formveränderungen von Prozessen treten nur in Geometrien auf, die der kompakten oder nichtkompakten Reproduzierbarkeit nicht angemessen sind. Wir wollen diese in den Reproduktionen enthaltene "Starrheit" an einem einfachen Laborbeispiel näher studieren.

Wir betrachten dazu zwei gleichgefertigte Tafeln aus Glas, auf denen in gleicher Weise mehrere (n) Lampen angebracht sind. Über einen gemeinsamen Mechanismus werden sie so gesteuert, daß sie abwechselnd aufleuchten, und zwar die auf beiden Tafeln entsprechenden Lampen jeweils synchron. Die eine Tafel (G) sei auf dem Labortisch befestigt, die andere (G') bewege sich auf einem zu G parallelen Fließband so an G vorbei, daß sich beide Tafeln zu einem Zeitpunkt (t) überdecken. Ein Beobachter, der sich vor G befindet, kann dann ohne alle technischen Hilfsmittel, wie Maßstäbe, Uhren usw. also nur mit seinem unbewaffneten Auge feststellen, ob sich ein Teil von G' hinter G befindet, ob sich also G und G' raumzeitlich überschneiden. Insbesondere ist dies auch für die verschiedenen Leuchten L_i und L'_i möglich, die in den Prozessen G und G' als Teilprozesse enthalten sind. In graphischer Darstellung ergibt sich dann das folgende Bild[1)].

---

1) Die Bevorzugung der in der Zeichnung verwendeten Galileitransformation $G \mapsto G'$ ist für unsere Betrachtung unwesentlich. Ebenso gut hätten wir eine Lorentztransformation wählen können.



Bei verschiedenen Wiederholungen von G, die durch verschiedene Fließbandgeschwindigkeiten realisierbar sind, werden sich dann verschiedentlich Teilprozesse treffen können ($L_i \cap L'_j \neq \emptyset$). Aus den wiederholungsabhängigen Überdeckungen der Teilprozesse läßt sich die in den Transformationen enthaltene Invarianzstruktur durch den folgenden Sachverhalt beschreiben: Werden die Lampen hinreichend klein und die Leuchtdauer entsprechend kurz gewählt, dann bleiben bei allen Wiederholungen, bei denen sich jeder Teilprozeß L_i mit L'_i trifft, die wiederholten Teilprozesse L'_i stets innerhalb des Gesamtprozesses G. Diese im Labor einfach zu prüfende Feststellung drückt die wesentliche Invarianzstruktur der Reduzierbarkeit aus (Quasistarrheit), die wir zunächst formal festhalten wollen ($P_0 := P/\{0\}$).

3.1.1 Quasistarrheit

$$\bigwedge_{a \in P_o} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \in P_o} \bigwedge_{\tau \in R} \bigwedge_{i,j,k=1..n:}$$

$$a_i \sqsubset a \;\wedge\; (\tau a_j \sqcap a_j \neq 0 \Longrightarrow \tau a_k \sqsubset a)$$

Offenbar ist 3.1.1 eine Verallgemeinerung des Freudenthal-Schmidtschen Starrheitsaxioms (vgl. § 1.1), das sich aus der Quasistarrheit für n=1 als Spezialfall ergibt. Hierin liegt eine der gemeinsamen Wurzeln unserer Auflösung des Raum- und Raumzeitproblems. Interpretieren wir die Elemente von P als Raumgebiete, dann garantiert 3.1.1 die entscheidende Relation der Raumgeometrie - die räumliche Starrheit. Interpretieren wir die Prozesse als Vorgänge, dann beschreibt 3.1.1 eine Vorgangswelt, in der sich Vorgänge wie quasistarre Entitäten verhalten, oder raumzeitgeometrisch formuliert, bezüglich der Quasimetrik Minkowskis sind Prozesse bei Reproduktionen im traditionell-geometrischen Sinn starr. Diese Invarianz ist die charakteristische Eigenschaft der Reproduktion.

Im Unterschied zum Raumproblem sind jetzt auch Dilatationen mit der Quasistarrheit verträglich. Erinnert man sich jedoch daran, daß die Lorentztransformationen auf dem Lichtkegel wie reine Dilatationen operieren, dann ist in dieser Hinsicht die Erweiterung des Starrheitsbegriffes faktisch zutreffend. Dennoch muß 3.1.1 etwas verschärft werden, was wir an dem nun folgenden Beispiel erläutern wollen.

Mit den Mengen

$$R(a) := \{\tau \in R \mid \tau a \cap a \neq 0\} \quad , \; a \in P_o$$

als Subbasis läßt sich die Gruppe R topologisieren, so daß die endlichen Schnitte

$$\bigcap_{i=1}^{n} R(a_i) \quad ; \quad a_i \in P_o \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

eine offene Umgebungsbasis der Identität von R ergeben. Im Fall der Raumgeometrie ist R(a) kompakt, bei der Raumzeitgeometrie gilt dies offenbar nicht.

Man könnte nun vermuten, daß die in der Quasistarrheit geforderten "Kerne" $a_1,\ldots,a_n$, die in dem Laborbeispiel durch die Leuchtvorgänge $L_1,\ldots,L_n$ realisiert wurden, auch beliebig kleine Umgebungen der Identität erzeugen können, sofern man nur die Kerne hinreichend verkleinert. Diese Vermutung erweist sich aber als falsch, was man leicht an einem Gegenbeispiel einsehen kann. Wir betrachten dazu einen (nichtlinearen) Homöomorphismus auf $\mathbb{R}^2$, der ein Gebiet a punktweise invariant läßt und außerhalb dieses Gebietes wie eine Dilatation wirkt. Für jeden Satz Kerne $a_1,\ldots,a_n$ aus a bleibt diese "Ferndilatation" in der Umgebung $\bigcap_{i=1}^{n} R(a_i)$ der Identität enthalten. Um solche pathologischen Fälle auszuschließen, müssen wir deshalb sicherstellen, daß die Kerne beliebig kleine Umgebungen der Identität erzeugen können. Wir formulieren diese Forderung ohne Verwendung von topologischen Strukturen.

3.1.2 Axiom 3:

$$\bigwedge a,b \in P_o \bigvee n \in \mathbb{N} \bigvee a_1,..,a_n \in P_o \bigwedge \tau \in R \bigwedge i,j,k=1..n:$$

$$a_i \sqsubset a \ \wedge \ (\tau a_j \sqcap a_j \neq 0 \Longrightarrow (\tau a_k \sqsubset a \ \wedge \ \tau b \sqcap b \neq 0))$$

Aus dem Axiom folgt dann, daß auch für $b_1, \ldots, b_m$ die Konklusion $\tau b_1 \sqcap b_1 \neq 0$, $l=1,\ldots,m$ garantiert wird. Im mathematischen Teil (vgl.III, §3.1, Satz 15) garantiert diese Verschärfung die Lokalkompaktheit der topologischen Gruppe und nur an dieser Stelle wird sie auch verwendet. Für die Herleitung der übrigen Strukturen reicht die einfache Quasistarrheit aus.

Mit gewissen Vereinfachungen läßt sich der gruppentopologische Umgebungsbegriff auch im Labor darstellen. In dem Beispiel der Glastafeln werden die Reproduktionen im wesentlichen durch die verschiedenen Fließbandgeschwindigkeiten charakterisiert. Durch Überprüfen der Bedingungen $L_i \cap L'_i \neq \emptyset, i=1,\ldots,n$ wird dann eine(endliche) Klasse von Wiederholungen durch die Geschwindigkeitsangabe ausgezeichnet, die in der Theorie, entsprechend vervollständigt, einer Umgebung der Identität $\bigcap_{i=1}^{n} R(L_i)$ entspricht. Mit solchen in Laborversuchen klassifizierten Umgebungen wird dann die Aussage von Axiom 3 experimentell testbar.

Als nächstes steuern wir die Konstruktion von Ereignissen an. Wir wollen sie aus immer "kleiner" werdenden Prozessen durch Limesbildung gewinnen. Hierzu ist die Explikation des Vergleichskriteriums "klein" bzw. "kleiner als" notwendig, bei der folgende Schwierigkeit auftritt. Zunächst scheint zur technischen Bewältigung dieser Vorstellung der Filterbegriff auszu-

auszureichen. Bei genauerer Betrachtung gewinnt man damit jedoch nicht den vorgeschlagenen Punktbegriff. Denn der bloße Filter ist zur Konstruktion ungeeignet, da es zu ihm noch Verfeinerungen geben könnte, die damit den Punktbegriff ad absurdum führen würden. Ultrafilter wiederum zerstören die in den Filterelementen enthaltene Umgebungsstruktur oder erzeugen die diskrete Topologie. Hier fehlt also ein Filter, der sozusagen "in der Mitte liegt", der also überall in gleicher Weise als Punkt identifiziert werden kann und der den natürlichen Umgebungsbegriff erhält. Bekanntlich leistet dies der Cauchy-Filter, für den aber eine Uniformität, d.h.ein globales Vergleichskriterium notwendig ist [1].Im Fall der Raumgeometrie (vgl. [SCH]) ergibt sich dieses Vergleichskriterium automatisch, wenn man (nach einem entsprechenden Transport) jedes Raumgebiet zur Konstruktion des Cauchy-Filters verwendet (als Folge der kompakten Reproduzierbarkeit).

Bei der Raumzeitgeometrie finden wir eine etwas komplizierte Situation vor. Hier können wir wegen der nichtkompakten Reproduzierbarkeit die Filterkonstruktion der Raumgeometrie nicht mehr anwenden, denn diese Filter würden im allgemeinen nicht mehr eindeutig konvergieren. Als Alternative führen wir deshalb mit den gruppentopologischen Umgebungen ein Uniformitätskriterium ein, das für jeden Prozess eine obere Schranke seiner raumzeitlichen"Größe" angibt und dadurch eine globale Vergleichsmöglichkeit gewährleistet. Es sei dazu U eine Umgebung der Identität.

---

1) Man darf sich nicht von vermeintlich lokalen Vorstellungen, wie z.B.von konzentrischen, immer kleiner werdenden Kugeln, verwirren lassen. Denn dabei werden unbemerkt schon metrische oder uniforme, also globale Vergleichskonzepte verwendet.

3.1.3 Präuniformität: $a \in P_o$ heißt klein von der Ordnung U, kl(a,U), gdw

$$\bigwedge_{b,c \in P_o} \bigvee_{\tau \in U} : \quad b,c \sqsubset a \Longrightarrow \tau b \sqcap c \neq 0$$

Wir wollen P zusammen mit der Relation "kl" einen präuniformen Raum nennen (vgl. 3.1.5). Geometrisch betrachtet bildet im Fall der Poincaré-Gruppe die Menge $U(x) = \{\tau x \mid \tau \in U\}$ eine aus Translationen und Schüben erzeugte Umgebung von x aus $\mathbb{R}^4$, die um so ausgedehnter wird, je weiter x vom Ursprung entfernt ist. Jedes Prozessgebiet, das in einer solchen Umgebung enthalten ist, ist klein von der Ordnung U.

Mit der Präuniformität lassen sich dann in Analogie zur üblichen Punktmengentopologie sogenannte Cauchy-Präfilter auf P definieren, die beliebig kleine Elemente enthalten (vgl. III, § 2.2). Für die Existenz solcher Filter benötigen wir noch die folgende Überdeckungseigenschaft, die wegen der Kleinheit der Überdeckungselemente einer Art von lokaler Präkompaktheit entspricht.

3.1.4 Axiom 4:

$$\bigwedge_{a \in P_o} \bigwedge_{U \in \mathfrak{B}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{b_1,..,b_n \in P_o} \bigwedge_{i=1...n:} \mathrm{kl}(b_i,U) \quad \wedge \quad a \sqsubset \bigsqcup_{j=1}^{n} b_j$$

Hierbei ist $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis der Identität. Mit der Allquantifikation über diese Basis wird die Existenz beliebig kleiner Prozesse gewährleistet. Das Axiom läßt sich nach den bisherigen

Erläuterungen auch empirisch überprüfen. Mit einer durch Geschwindigkeitsangaben festgelegten Umgebung, d.h.einer ausgewählten Klasse von Wiederholungen, kann jeder Vorgang auf seine Ausdehnung hin getestet werden. Hierbei untersucht man, ob ein Teilvorgang nach einer solchen Wiederholung einen anderen Teilvorgang des vorgelegten Prozesses treffen kann. Die Überdeckungseigenschaft wird in den Fällen, in denen sie sich zur einfachen, räumlichen Überdeckung der am Vorgang beteiligten Körper reduziert, besonders plausibel.

Mit diesen Axiomen existiert zu jedem Cauchy-Präfilter genau ein minimaler Cauchy-Präfilter, die zusammen, analog zur Vervollständigung eines uniformen Raumes, die Punkte eines vollständigen Raumes E (Raumzeitkontinuum) erzeugen und dessen Elemente als Vorgangsstellen bzw.Ereignisse interpretiert werden. Hier wird deutlich, daß die verbreitete Meinung, Ereignisse seien das Ergebnis immer kleiner werdender Prozesse, wie sie besonders in empiristischen Begründungsversuchen des Ereignisraumes vertreten wird, eine nicht vorhandene Einfachheit suggeriert. Erst die zwischen Filter und Ultrafilter liegenden Cauchy-Filter erzeugen ein in den Punkten homogenes Kontinuum, das mit der natürlichen Topologie versehen ist. Der Ereignisraum wird durch die von der Präuniformität induzierte, uniforme Struktur.

3.1.5 $N_V := \{(x,y) \in E \times E \mid \bigvee a \in P_o : a \in x,y \wedge kl(a,V)\}$

hausdorffsch, separabel, metrisierbar und lokalkompakt. Ein Prozess a erscheint im Ereignisraum als offene Menge $\tilde{a}$ von

Punkten, die,als minimale Cauchy-Präfilter, alle den Prozess a gemeinsam enthalten (vgl. III, § 2.3). Die Reproduktionen lassen sich als uniforme Automorphismen auf E durch $\tilde{\tau}x := \{\tau a \mid a \in x\}$ darstellen, die zusammen eine topologische Gruppe $\tilde{R} := \{\tilde{\tau} \mid \tau \in R\}$ bilden. Dann wird $\tilde{R}$ im Raum aller uniformen Automorphismen von E bezüglich ihrer zweiseitigen Uniformität zur topologischen Gruppe $\hat{R}$ vervollständigt, die dann auf kanonische Weise mit der von $\tilde{R}$ herrührenden kompakt-offenen Topologie versehen ist. Diese Topologie ist identisch mit der Topologie der kompakten Konvergenz, die wegen der Lokalkompaktheit von E mit der Topologie der stetigen Konvergenz übereinstimmt. Schließlich kann man zeigen, daß $\hat{R}$ wegen Axiom 3 lokal-kompakt, separabel und damit metrisierbar ist (vgl. III, § 3.1).

3.2 Globale Kennzeichnung

Zum Anschluß an die Arbeit von Freudenthal (1964) ist neben der Quasimetrik noch der Zusammenhang des Ereignisraumes und die Transitivität der Gruppe ($\hat{R}$) herzuleiten. Eine Deduktion aus Axiomen, die sich operativ begründen lassen, wird mit der Forderung nach Kettenverbindungen gewährleistet. Das heißt, es soll zwischen je zwei Prozessen eine Kette von anderen Prozessen existieren, die beide Prozesse verbindet. Experimentell lassen sich solche Kettenverbindungen einfach durch ein Fadenpendel realisieren, das von einem Prozess zum anderen

transportiert wird. Dabei entspricht jedem Schwingungsvorgang ein Kettenglied. Die mit diesem Beispiel verbundene Periodizität bzw.die daraus resultierende Gleichförmigkeit der Kettenglieder ist axiomatisch nicht erforderlich; es genügt, wenn die Kettenglieder eine vorgegebene Größenordnung nicht übersteigen.

3.2.1 Definition: $\{a_1,\ldots,a_n\} \subset P_o$ heißt eine Kette zwischen a und b aus P_o, $< a \mid a_1,\ldots,a_n \mid b >$, gdw für alle i=1,...,n-1 gilt:

$a \sqcap a_1 \neq 0 \ \wedge \ a_i \sqcap a_{i+1} \neq 0 \ \wedge \ a_n \sqcap b \neq 0$

Die Kettenverbindungen sollen den Zusammenhang des Ereignisraumes garantieren. Dazu müssen wir den in der intuitiven Vorstellung einer Kette stets vorhandenen Zusammenhang der Kettenglieder aber noch explizit voraussetzen. Da jedoch in der verbandstheoretischen Sprache der Prozesse keine topologischen Konzepte formuliert sind, definieren wir eine Art von Präzusammenhang.

3.2.2 Definition: $a \in P_o$ heißt kettenkonnex, K(a), gdw

$$\bigwedge_{b,c \sqsubset a} \bigwedge_{U \in \mathfrak{B}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \in P_o} \bigwedge_{i,j=1}^{n}:$$

$a_i \sqsubset a \ \wedge \ kl(a_j,U) \ \wedge \ <b \mid a_1,..,a_n \mid c>$

Der Anschauung gemäß fordern wir nun, daß zwischen je zwei Prozessen eine kettenkonnexe Kettenverbindung existiert (globaler Zusammenhang von E). Darüber hinaus ist es nicht weniger plausibel zu fordern, daß in jedem Prozess selbst auch ein kettenkonnexer Teilprozess enthalten ist. Daraus resultiert dann der lokale Zusammenhang des Ereignisraumes.

3.2.3 Axiom 5:

$$\bigwedge_{a,b \in P_o} \bigvee_{a' \sqsubset a,\ b' \sqsubset b} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \in P_o}:$$

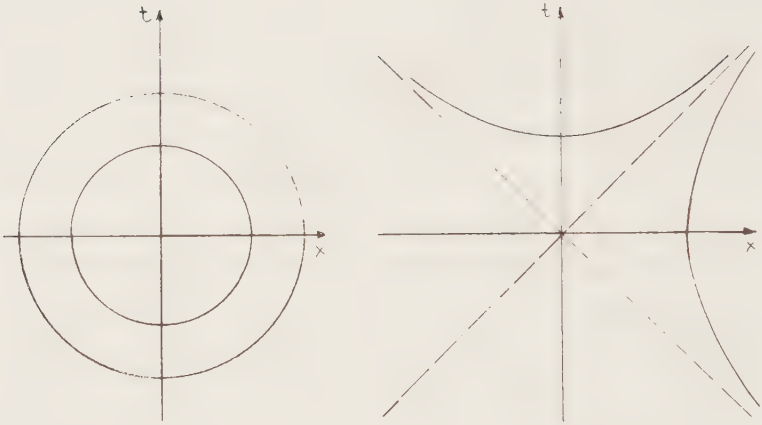
$$K(a') \wedge K(b') \wedge K(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i) \wedge \langle a' \mid a_1,..,a_n \mid b' \rangle$$

Schließlich läßt sich zeigen (vgl. III, § 3.2), daß die vervollständigte Gruppe $\hat{R}$ transitiv auf jedem Kompaktum des Ereignisraumes operiert. Dies war bereits durch die Existenz von Prozessen, die klein von der Ordnung einer Gruppenumgebung sind (Axiom 4), gewährleistet. Nach Axiom 5 liegen nun je zwei Ereignisse in einer präkompakten Kettenverbindung (jeder in E induzierte Prozess ist relativkompakt, vgl.III, § 2.3, Satz 12), woraus sich die gewünschte Transitivität der Gruppe ergibt.

Für die Herleitung der reellwertigen Quasimetrik (vgl. 1.2.1), die in der Raumgeometrie den Abstand und in der Raumzeitgeometrie den Ereignisabstand charakterisiert, verwenden wir die Anordnungsstrukturen der sogenannten Abstandssphären. Diese sind Bahnen mit konstantem"Abstand" zu einem festen Punkt x. Sie werden durch die Anwendung der Standuntergruppe

$$J_x := \{\tau \in \hat{R} \mid \tau x = x\}, \quad x \in E$$

auf die Punkte des Ereignisraumes erzeugt. Im Beispiel der euklidischen, absoluten Raumgeometrie sind die Abstandssphären Kugelflächen und im Beispiel der Minkowskischen Raumzeitgeometrie ergeben sich Hyperbelflächen.



Charakteristisch für die Struktur der Abstandssphären ist die "Nullabstandssphäre", die wir Isotropiekegel nennen wollen. Er wird in den beiden Beispielen einmal durch den Fixpunkt x einmal durch den zu x gehörenden Lichtkegel dargestellt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine den geometrischen Strukturen des Lichtkegels angepasste, metrikfreie Präzisierung des Isotropiekegels einzuführen. So enthält z.B. der Lichtkegel alle Bahnen, die beliebig nahe zum Fixpunkt gelangen [1]. Eine dem Prozessbegriff näherliegende Definition ist jedoch

$$I_x := \overline{\bigcap_{a \in x} J_x^{\circ}(\tilde{a})}$$

---

1) Die Anzahl solcher Bahnen enthält sogar ein Dimensionsargument, sofern die Spiegelungen ausgeschlossen sind. Damit ließe sich z.B.leicht die 2-dimensionale Relativitätstheorie ausschliessen (vgl.Kap.IV).

mit $\tilde{a}$ als die dem Prozess a entsprechende Ereignismenge; J_x^o ist die id-Komponente der Standuntergruppe und $J_x^o(\tilde{a})$ ist die Vereinigung aller $\tau\,\tilde{a}$ mit $\tau \in J_x^o$.

Im Fall der Raumzeitgeometrie Minkowskis ist I_x praktisch der Schnitt aller Hyperboloide um den Fixpunkt x. Mit dieser Definition ist I_x nicht leer, abgeschlossen und zusammenhängend. Zudem ist der Isotropiekegel bzgl.der Gruppe invariant, d.h. $\tau I_x = I_{\tau x}$ für alle $\tau \in \hat{R}$.

Durch den Isotropiekegel wird der Ereignisraum (im Falle der Raumzeit Minkowskis) in verschiedene Teile zerlegt. In den entsprechenden Zusammenhangskomponenten sind die Abstandssphären linear von innen nach außen geordnet. Diese Anordnungsstruktur wollen wir axiomatisch nachkonstruieren. Wir führen dazu den Begriff der Zerlegung eines topologischen Raumes ein, den wir später geeignet verschärfen werden. Im folgenden sei A eine Teilmenge von E.

3.2.4 A zerlegt E gdw E/A nicht zusammenhängend ist.

Offenbar zerlegen die Bahnen in unseren beiden Beispielen die jeweiligen entsprechenden Räume. Im abstrakten Fall ist allerdings noch nicht geklärt, ob die Bahnen $J_x^o(y)$ diese Eigenschaft schon besitzen. Darüber hinaus steht auch noch nichts über die topologischen Eigenschaften der Bahnen fest, ob sie z.B.offen oder abgeschlossen sind oder ob ihr topologisches Inneres leer ist.

An dieser Stelle erinnern wir daran, daß die Dilatationen mit den bisherigen Axiomen (insbesondere mit Axiom 3) verträglich waren. Dann können z.B. Dilatationen in Verbindung mit Lorentztransformationen bewirken, daß die Bahnen offen sind und nicht zerlegen (sie füllen z.B.den Vorwärtslichtkegel aus). Dagegen vermag der Abschluß von solchen Bahnen den Raum doch zu zerlegen, was man sofort an der Anwendung der betrachteten Transformationen auf einen raumartigen Punkt erkennt.

Schließlich ist auch noch nichts über ihre Lage innerhalb der Komponenten ausgesagt, beliebige Muster oder nicht zu ordnende Strukturen sind möglich. Also muß zudem die erwähnte lineare Ordnung der Bahnen axiomatisch bestimmt werden. Wir bedienen uns dazu einer von J.Tits (1955) angegebenen Trennungsrelation. Im folgenden seien dazu A,B,C nichtleere Teilmengen von E.

3.2.5 Definition: B separiert A von C, S(A,B,C), gdw es zwei nichtleere offene Teilmengen P_1, P_2 von E gibt, so daß gilt:

(i) $A \subset B \cup P_1 \setminus C \subset B \cup P_2$

(ii) $P_1 \cap P_2 \subset B$

(iii) $B \cup P_1 \cup P_2 = E$

Aus der schwachen Bedingung 3.2.5 (ii) folgt dann sofort, daß die Relationen S(E,E,E), S(A,E,C) oder "S(A,B,B) sofern S(A,B,C)", erfüllt sind.Tits konnte sich diese Allgemeinheit leisten, da die Bahnen durch sein Starrheitsaxiom abgeschlossen waren und nirgends dicht lagen. (Tits fordert, daß die Gruppe eine Isometriegruppe der uniformen Struktur ist)In unserem Fall hat die

Gruppe nicht diese Eigenschaft. Am Beispiel der Lorentzgruppe sieht man nämlich, daß die Transformationen zwar uniforme Automorphismen der der gewöhnliche $\mathbb{R}^4$-Uniformität, aber nicht Isometrien dieser Uniformität sind. Um diese topologischen Schwierigkeiten zu überwinden, wählen wir einen Weg, der sich eng an die Titssche Begriffsbildung anlehnt und verschärfen dazu die Relation S.

3.2.6 Definition: B trennt A von C, T(A,B,C), gdw

(1) S(A,B,C)

(11) $P_1 \cap P_2 = \emptyset \quad \wedge \quad P_i \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$, $i=1,2$.

Hierbei bedeutet $\overset{\circ}{B}$ das topologische Innere von B. Der Zweck dieser Spezialisierung ist klar. Aus $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ folgt, daß B den topologischen Raum E zerlegt [1]. Die zweite Bedingung ist ungleich schärfer. Sie bewirkt, daß die Bahnen nirgends dicht und abgeschlossen sind. Mit der so verschärften Trennungsrelation können wir nun das von Tits verwendete Anordnungsaxiom für die Abstandssphären übernehmen. So wird erneut die erstaunlich enge Verwandschaft zwischen Raum- und speziell relativistischer Raumzeitgeometrie deutlich.

3.2.7 Axiom 6:

$$\bigwedge_{x,y,z \in E}: \; (\; y \in E/I_x \quad \wedge \quad z \in C_x(y) \;) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \; (\; T(\{x\}, J_x^o(y), J_x^o(z)) \quad \vee \quad T(\{x\}, J_x^o(z), J_x^o(y) \;)$$

Hierbei bedeutet $C_x(y)$ die Zusammenhangskomponente von y in E/I_x. Aus dem Axiom folgt dann sofort:

---

1) Die Zerlegbarkeit des Raumes durch eine Abstandssphäre wird auch bei H.Freudenthal (1956) bei der Klassifikation der Raumgeometrie gefordert. Sie erzwingt unter anderem die Lie-Eigenschaft der Gruppe.

1) Der Fall $I_x=E$ (der bei Dilatationen und Rotationen auftritt) wird nicht ausgeschlossen. Allerdings wird dann die Quasimetrik $\rho \equiv 0$, was später durch ein Freudenthalsches Axiom verhindert wird.

2) Im Fall der Raumzeit Minkowskis werden die Dilatationen ausgeschlossen. Sie würden $J_x^o(y)=C_x(y)$ zur Folge haben. Wegen des lokalen Zusammenhanges von E sind aber die Komponenten offen und abgeschlossen, womit man zeigen kann, daß $C_x(y)$ den Raum E nicht mehr zerlegt.

3) Die Galilei-Raumzeit ist ausgeschlossen. Nach der Definition des Isotropiekegels schrumpft die Galileische Gleichzeitigkeitsebene zum Fixpunkt x zusammen. Demnach sind die Bahnen nicht mehr linear geordnet und diejenigen, die in der Galileischen Gleichzeitigkeitsebene verlaufen, zerlegen auch nicht.

Interpretierten wir die Ereignisse wieder als minimale Cauchy-Präfilter, dann kann Axiom 6 noch approximativ durch Prozesse und Reproduktionen erklärt werden. Die Abstandssphären werden dabei auf folgende Weise durch Vorgangsketten angenähert. Wir betrachten dazu eine Vorgangskette und wiederholen sie so, daß das erste Kettenglied im wesentlichen raumzeitlich invariant bleibt. Dann beschreiben die reproduzierten Kettenenden ein Raumzeitgebilde, das im Grenzfall immer kleinerer Kettenglieder eine Abstandssphäre approximiert. Werden die wiederholten Vorgangsketten z.B.durch gleich viele Schwingungsvorgänge von ganggleichen Uhren dargestellt, die sich von einem Ereignis (idealisierter Kettenanfang) mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Richtungen entfernen, dann hat man die geläufige,phy-

sikalische Interpretation einer (zeitartigen) Abstandssphäre. Im Endeffekt operieren also Vorgangsketten ähnlich starr wie Ketten aus starren Raumgebieten (Quasistarrheit).

Mit Axiom 6 werden die Bahnen der Standuntergruppe abgeschlossen und nirgends dicht (vgl.III, §4.1) Zudem zerlegen sie den Raum in zwei Komponenten.
Die Orbitmenge

$$O_x^o(y) := \{J_x^o(z) \mid z \in C_x(y)\}$$

ist unter der Gruppe $\hat{R}$ invariant, d.h. $\tau\, O_x^o(y) = O_{\tau x}^o(\tau y)$ und kann durch die Trennungsrelation T linear geordnet werden. $O_x^o(y)$ ist offen, im Dedekindschen Sinn stetig (vgl.III, § 4.1, Lemma 5) und enthält eine abzählbar dichte Teilmenge. Nach einem Theorem von Hausdorff ist dann $O_x^o(y)$ zu einem offenen Intervall reeller Zahlen isoton, d.h.es existiert eine Bijektion, die die Ordnung respektiert. Aus der Isotonie ergibt sich schließlich die gewünschte Quasimetrik ρ , die invariant bezüglich der Gruppe $\hat{R}$ ist. Die Quasimetrik ρ ist dabei nur bis auf eine Quasimetrik ρ' , die Funktion von ρ ist, eindeutig bestimmt und mehr verlangt Freudenthal nicht. Damit ist der Anschluß an die Freudenthalsche Arbeit (1964) hergestellt.

Zum Abschluß kehren wir nochmals zur Präuniformität (3.1.3) zurück. Mit diesem Vergleichskriterium lassen sich die bei Messungen auftretenden Ungenauigkeiten kennzeichnen. Wird z.B.ein Ereignis oder ein Ereignisabstand bestimmt, dann sind mit den räumlichen und zeitlichen Messungen gewisse Ungenauig-

keiten verknüpft, die von der stets endlichen Ausdehnung der Vorgangsstellen und von den Meßgeräten verursacht werden. Die auftretenden Fehlergrenzen können in der mathematischen Theorie zu einer raumzeitlichen Umgebung zusammengefaßt werden, die die Ungenauigkeit der Messung charakterisiert. In der physikalischen Interpretation entspricht diese Umgebung einem kleinen Raumzeit- oder Weltbereich, in dem das gemessene Ereignis nicht weiter lokalisiert werden kann. Mit der Präuniformität bzw.mit der uniformen Struktur des Ereignisraumes wird die Ausdehnung der Umgebung durch eine Menge von Raumzeittransformationen gekennzeichnet, die je zwei Ereignisse der Umgebung ineinander überführen. Betrachten wir die Umgebung als einen Prozess und interpretieren sie als Vorgang, dann entspricht dieser gruppentopologischen Charakterisierung eine Klasse von Wiederholungen, bei denen sich der wiederholte Vorgang mit dem ursprünglichen Vorgang noch überschneidet(Präuniformität). Die Präuniformität legt damit fest, von welcher Nachbarschaftsordnung(bezüglich der Ereignisraumuniformität) die Unschärfeumgebung ist. Mit dieser Einordnung präzisiert die Präuniformität die approximative Verbindung, die zwischen wirklichen Meßresultaten, d.h.Realrelationen und den in der Theorie idealisierten Relationen besteht. Die idealisierten Relationen ergeben erst in Kombination mit den uniformen Strukturen eine ausreichende Kennzeichnung der Realrelationen, da jetzt auch die Art und Weise der Approximationen zwischen Theorie und Wirklichkeit klargestellt ist. Die Präuniformität erfüllt damit die in [LUD 3] § 6 geforderten Eigenschaften für eine "physikalische Approximation".

III. Die mathematischen Strukturen der Raumzeit

1. Das Axiomensystem

Wir wiederholen kurz die Axiome, die in II,§2.1 bis §3.2 erläutert wurden.

Axiom 0:

P ist eine nichtleere Menge, $\sqsubset$ ist eine Relation auf P und R eine nichtleere Teilmenge aus Pot(P × P).

Axiom 1:

(P, $\sqsubset$) ist ein abzählbar unendlicher, distributiver Verband mit kleinstem Element 0.

Axiom 2:

R ist eine Untergruppe der Verbandsautomorphismen auf (P, $\sqsubset$).

Im folgenden sei $P_o := P/\{0\}$.

Axiom 3:

$$\bigwedge_{a,b \in P_o} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \in P_o} \bigwedge_{\tau \in R} \bigwedge_{i,j,k=1,..,n:} a_i \sqsubset a \wedge (\tau a_j \sqcap a_j \neq 0 \Longrightarrow (\tau a_k \sqsubset a \wedge \tau b \sqcap b \neq 0))$$

Hierbei ist $a \sqcup b$ bzw. $a \sqcap b$ das Supremum bzw. Infimum von a und b in P. Analog dazu ist $\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i$ bzw. $\bigsqcap_{i=1}^{n} a_i$ definiert. Axiom 3 wird lediglich zum Beweis von III,§3.1 Satz 15 verwendet, ansonsten genügt stets die schwächere Quasistarrheit.

Quasistarrheit:

$$\bigwedge_{a \in P_o} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \in P_o} \bigwedge_{\tau \in R} \bigwedge_{i,j,k=1,..,n:} a_i \sqsubset a \wedge (\tau a_j \sqcap a_j \neq 0 \Longrightarrow \tau a_k \sqsubset a)$$

In 2.2.10 führen wir ein Uniformitätskriterium - a ∈ P heißt klein von der Ordnung V, kl(a,V) - für Prozesse ein. Hierbei ist V eine Umgebung der Identität aus der Gruppe R, die in §2.1 geeignet topologisiert wird. $\mathfrak{B}$ sei im folgenden eine Umgebungsbasis der Identität.

Axiom 4:

$$\bigwedge_{a \in P_o} \bigwedge_{V \in \mathfrak{B}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{b_1,..,b_n \in P_o} \bigwedge_{i=1,..,n:} kl(b_i,V) \wedge a \sqsubset \bigsqcup_{j=1}^{n} b_j$$

In §3.2 werden wir die Begriffe "Kette" und "kettenkonnexer" Prozess nochmals wiederholen (vgl. II,§3.2, Definitionen 3.2.1. und 3.2.2.)

Axiom 5:

$$\bigwedge_{a,b \in P_o} \bigvee_{a',b' \in P_o \text{ mit } a' \sqsubset a, b' \sqsubset b} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \in P_o:} K(a') \wedge K(b') \wedge K\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i\Big) \wedge \langle a' \mid a_1,..,a_n \mid b' \rangle$$

Wir setzen jetzt die Bezeichnungen von §4 voraus, insbesondere die Definitionen 4.1.1, 4.1.8 und 4.1.12.

Axiom 6:

$$\bigwedge_{x,y,z \in E:} (y \in E/I_x \wedge z \in C_x(y)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (T(\{x\}, J_x^o(y), J_x^o(z)) \vee T(\{\dot{x}\}, J_x^o(z), J_x^o(y)))$$

2. Die Topologie der Raumzeit

2.1 Topologisierung der Reproduktionsgruppe

2.1.1 Definition: $R(a) := \{\tau \in R \mid \tau a \sqcap a \neq 0\}$ für $a \in P_o$

$\mathcal{B} := \{ \bigcap_{i=1}^{n} R(a_i) \mid a_i \in P_o,\ n \in \mathbb{N}\}$

2.1.2 Lemma: $\mathcal{B}$ ist die Basis eines Filters, die GV'_I, GV'_{II} und GV'_{III} erfüllt (vgl. [BGT], III,§1.2)

Beweis: $\mathcal{B}$ ist eine Filterbasis, denn $\emptyset \notin \mathcal{B}$, da $id \in R(a)$ für alle $a \in P_o$. Offenbar ist mit $\bigcap_{i=1}^{n} R(a_i)$, $\bigcap_{j=1}^{m} R(b_j) \in \mathcal{B}$ auch $\bigcap_{i=1}^{n} R(a_i) \cap \bigcap_{j=1}^{m} R(b_j) \in \mathcal{B}$.

GV'_I: $\bigwedge U \in \mathcal{B} \bigvee V \in \mathcal{B}: VV \subset U$

Sei $U := \bigcap_{i=1}^{n} R(a_i) \in \mathcal{B}$. Zu a_i gibt es "Kerne"(Quasistarrheit) $b_1^i, .., b_{n_i}^i \sqsubset a_i$, die die Bedingungen der Quasistarrheit erfüllen.

Sei $V := \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n_i} R(b_j^i)$, dann folgt $V \subset U$. Sei $\sigma, \tau \in V$.

dann folgt für alle $i=1,..,n$ und $j=1,..,n_i$:

$0 \neq \sigma(\tau b_j^i \sqcap b_j^i) \sqsubset \sigma\tau b_j^i \sqcap b_j^i \sqsubset \sigma\tau b_j^i \sqcap a_i \sqsubset \sigma\tau a_i \sqcap a_i$, also $\sigma\tau \in U$.

GV'_{II}: $\bigwedge U \in \mathcal{B} \bigvee V \in \mathcal{B}: V^{-1} \subset U$

$R(a)$ ist symmetrisch wegen der Äquivalenz: $\tau a \sqcap a \neq 0 \iff \tau^{-1} a \sqcap a \neq 0$, so daß sogar $U^{-1} = U$ gilt.

GV'_{III}: $\bigwedge \mu \in R \bigwedge U \in \mathcal{B} \bigvee V \in \mathcal{B}: V \subset \mu U \mu^{-1}$

Sei $\mu \in R$, $U := \bigcap_{i=1}^{n} R(a_i) \in \mathcal{B}$ und $V := \bigcap_{i=1}^{n} R(\mu a_i) \in \mathcal{B}$.

Sei $\tau \in V$, dann folgt für alle $i=1,..,n$: $\tau\mu a_i \sqcap \mu a_i \neq 0$, also $0 \neq \mu^{-1}(\tau\mu a_i \sqcap \mu a_i) \sqsubset \mu^{-1}\tau\mu a_i \sqcap a_i$ und damit $\mu^{-1}\tau\mu \in U$. □

2.1.3 Satz: R ist eine topologische Gruppe mit der offenen Basis $\{\tau U \mid \tau \in R, U \in \mathfrak{B}\}$.

Beweis: Nach [BGT] III,§1.2 Prop.1 gibt es zu $\mathfrak{B}$ eine eindeutige Topologie auf R, in der der zu $\mathfrak{B}$ gehörende Filter der Umgebungsfilter der Identität ist. Damit bleibt zu zeigen, daß $U \in \mathfrak{B}$ offen ist, d.h.:

$$\bigwedge U \in \mathfrak{B} \bigwedge \mu \in U \bigvee V \in \mathfrak{B}: \mu V \subset U$$

Sei $U := \bigcap_{i=1}^{n} R(a_i) \in \mathfrak{B}, \mu \in U$ und $c_i := \mu a_i \sqcap a_i \neq 0$ für alle $i=1,..,n$. Sei $b_i := \mu^{-1}c_i = a_i \sqcap \mu^{-1}a_i, i=1,..,n$ und $V := \bigcap_{j=1}^{n} R(b_j)$. Dann folgt für alle $i=1,..,n$, daß $b_i, c_i \sqsubset a_i$. Sei $\tau \in \mu V$, dann folgt $d_i := \tau b_i \sqcap b_i \neq 0$, da $\mu^{-1}\tau b_i \sqcap b_i \neq 0$ wegen $\mu^{-1}\tau \in V$, für alle $i=1,..,n$. Damit folgt $d_i \sqsubset \mu b_i = c_i \sqsubset a_i$ und $d_i \sqsubset \tau b_i \sqsubset \tau a_i$, also $d_i \sqsubset a_i \sqcap \tau a_i \neq 0$ für alle $i=1,..,n$ und damit $\tau \in U$. □

2.2 Punktierung der Prozessmenge

2.2.1 Definition: Eine Teilmenge $F \subset P$ mit

(i) $0 \notin F$

(ii) $\bigwedge a,b \in F \bigvee c \in F: \; c \sqsubset a \sqcap b$

heißt Präfilterbasis auf P. Gilt zudem

(iii) $\bigwedge a \in F \bigvee b \in P: \; a \sqsubset b \Longrightarrow b \in F$,

dann heißt F ein Präfilter auf P.

In Analogie zum Filterbegriff gilt beim Präfilter (vgl. [BGT] I,§6 und I,§6 Exercises 17, 18):

2.2.2 Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Menge von Präfilter auf P:

(i) $\underline{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ ist ein Präfilter auf P

(ii) Wenn $\mathcal{F}$ bezüglich "$F \subset G$" total geordnet ist, dann ist

$\overline{F} := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ ein Präfilter auf P

(iii) Jeder Präfilter ist in einem maximalen Präfilter enthalten (Ex.17c).

2.2.3 Definition: Ein Präfilter F heißt Prim-Präfilter auf P, gdw $\bigwedge a,b \in P_o: \; a \sqcup b \in F \Longrightarrow (a \in F \vee b \in F)$

2.2.4 Lemma: Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ nichtleere Mengen von Präfilter auf P mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, dann ist $\underline{\mathcal{G}} \subset \underline{\mathcal{F}}$.

Beweis: Sei $g \in \underline{\mathcal{G}}$, dann $g \in G$ für alle $G \in \mathcal{G}$, also $g \in F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und damit $g \in \underline{\mathcal{F}}$. □

2.2.5 Lemma: Jeder maximale Präfilter ist ein Prim-Präfilter.

Beweis: [BGT] I,§6 Ex. 18b. □

2.2.6 Notation: Mit M_p bzw. M wird die Menge der Prim- bzw. der maximalen Präfilter auf P bezeichnet.

2.2.7 Lemma: Seien $a,b \in P_o$ und $M_p(a)$ bzw. $M_p(b)$ die Menge der Prim-Präfilter M auf P mit $a \in M$ bzw. $b \in M$, dann gilt:

(i) $M_p(a) \cup M_p(b) = M_p(a \sqcup b)$

(ii) $M_p(a) \cap M_p(b) = M_p(a \sqcap b)$

Beweis: (i): $a \in M$ oder $b \in M$, dann $a \sqcup b \in M$. Sei $a \sqcup b \in M$, dann folgt per Definition 2.2.3 $a \in M$ oder $b \in M$.
(ii): $a \in M$ und $b \in M$, dann $a \sqcap b \in M$. Sei $a \sqcap b \in M$, dann ist $a \in M$ und $b \in M$. □

2.2.8 Corollar:

(i) $\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i \in M$ und $M \in M_p$, dann gibt es ein $j \in \{1,..,n\}$ mit $a_j \in M$.

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} M_p(a_i) = M_p(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i)$

2.2.9 Lemma: Jeder Präfilter F ist der Durchschnitt der Prim-Präfilter, die F enthalten.

Beweis: [BGT] I,§6 Ex. 18c. □

Wir führen jetzt ein Uniformitätskriterium für Prozesse ein.

2.2.10 Präuniformität: Sei $a \in P_o$ und $V \in \mathcal{B}$. a heißt klein von der Ordnung V, kl(a,V), gdw

$$\bigwedge_{b,c \in P_o} \bigvee_{\tau \in V}: \; b,c \sqsubset a \Longrightarrow \tau b \sqcap c \neq 0$$

2.2.11 Lemma:

(i) kl(a,V) und $V \subset U \in \mathcal{B} \Longrightarrow$ kl(a,U)

(ii) kl(a,V), kl(b,V) und $a \sqcap b \neq 0 \Longrightarrow$ $kl(a \sqcup b, V^2)$

(iii) kl(a,V) und $\tau \in R \Longrightarrow$ $kl(\tau a, \tau V \tau^{-1})$

Beweis: (i) ist trivial.

(ii): Sei $c,d \sqsubset a \sqcup b$ und oBdA sei $c' := c \sqcap a \neq 0$. Zu $a \sqcap b \sqsubset a$ gibt es $\tau \in V$ mit $e: = \tau c' \sqcap (a \sqcap b) \neq 0$. Zu $e \sqsubset a$ und $e \sqsubset b$ gibt es $\sigma \in V$ mit $\sigma e \sqcap d \neq 0$, also $\sigma\tau c \sqcap d \neq 0$.(vgl. [BGT]II, §3.1 Prop.1)

(iii): $b', c' \sqsubset \tau a$ impliziert $b: = \tau^{-1} b' \sqsubset a$ und $c: = \tau^{-1} c' \sqsubset a$. Dann gibt es $\sigma \in V$ mit $\sigma b \sqcap c \neq 0$, also $\sigma\tau^{-1} b' \sqcap \tau^{-1} c' \neq 0$ und damit $\tau\sigma\tau^{-1} b' \sqcap c' \neq 0$. □

2.2.12 Definition: Zwei Präfilter F,G heißen benachbart von der Ordnung $U \in \mathcal{B}$, n(F,G;U) , gdw

$$\bigwedge_{a \in F} \bigwedge_{b \in G} \bigvee_{\tau \in U}: \; \tau a \sqcap b \neq 0$$

2.2.13 Lemma: Für alle $A,B \in M_p(a)$ gilt genau dann n(A,B;V), wenn kl(a,V).

Beweis: " $\Longrightarrow$ ": Seien $b,c \sqsubset a$ und $B \in M_p(a)$, $C \in M_p(c)$, dann folgt mit $n(B,C;V)$ die Behauptung.

" $\Longleftarrow$ ": Seien $A,B \in M_p(a)$ und $a' \in A$, $b' \in B$. Dann folgt $c := a' \sqcap a \neq 0$ und $d := b' \sqcap a \neq 0$. Mit $c,d \sqsubset a$ gibt es $\tau \in V$ und $\tau c \sqcap d \neq 0$, also $\tau a' \sqcap b' \neq 0$. □

2.2.14 Definition: Ein Präfilter C heißt Cauchy-Präfilter, gdw

$$\bigwedge V \in \mathcal{B} \bigvee c \in C: \; kl(c,V)$$

2.2.15 Satz: Jeder Prim-Präfilter ist ein Cauchy-Präfilter.

Beweis: Sei $V \in \mathcal{B}$ und M ein Prim-Präfilter mit $a \in M$. Nach Axiom 4 gibt es $b_1,..,b_n \in P_o$ mit $kl(b_j,V)$, $j=1,..,n$ und $a \sqsubset \bigsqcup_{i=1}^{n} b_i$. Dann ist $\bigsqcup_{i=1}^{n} b_i \in M$ und mit 2.2.8(i) gibt es ein $k \in \{1,..,n\}$ mit $b_k \in M$. □

Es sei C die Menge der Cauchy-Präfilter auf P, dann gilt offenbar: $M \subset M_p \subset C$

2.2.16 Lemma: Seien A,B,C Cauchy-Präfilter mit $n(A,B;V)$ und $n(B,C;V)$, dann gilt $n(A,C;VWV)$ für jedes $W \in \mathcal{B}$.

Beweis: Sei $a \in A$, $c \in C$ und $W \in \mathcal{B}$, dann gibt es $b \in B$ mit $kl(b,W)$. Wegen $n(A,B;V)$ und $n(B,C;V)$ gibt es $\sigma,\tau \in V$ mit $b_a := \sigma a \sqcap b \neq 0$ und $b_c := \tau c \sqcap b \neq 0$. Dazu gibt es $\mu \in W$ mit $\mu b_a \sqcap b_c \neq 0$, so daß gilt: $\mu b_a \sqsubset \mu\sigma a$ und $0 \neq \tau^{-1}\mu b_a \sqcap \tau^{-1} b_c \sqsubset \tau^{-1}\mu\sigma a \sqcap c$. Mit $V = V^{-1}$ folgt die Behauptung. □

2.2.17 Corollar: Seien $F,G \subset C$, $F \cap G \neq \emptyset$ und $n(A,A';V)$, $n(B,B';V)$ für alle $A,A' \in F$ und $B,B' \in G$, dann gilt $n(A,B;VWV)$ für alle $A,B \in F \cup G$ und alle $W \in \mathcal{B}$.

2.2.18 Satz: Die Menge C der Cauchy-Präfilter ist nach unten induktiv geordnet (d.h. jede total geordnete, nichtleere Teilmenge T besitzt ein Infimum).

Beweis: Sei $\underline{T} := \bigcap_{C \in T} C$, dann ist $\underline{T} \in C$ zu zeigen! Wegen 2.2.2(i) ist $\underline{T}$ ein Präfilter. Sei $U \in \mathcal{B}$ und $V \in \mathcal{B}$ mit $V^6 \subset U$. Zu V gibt es für jedes $C \in T$ ein $a_C \in C$ mit $kl(a_C,V)$. Sei

$$T_V := \{ a_C \in P \mid \bigvee C \in T: a_C \in C \wedge kl(a_C,V)\} \quad \text{und}$$

$$A_V := \{ M \in M_p \mid \bigvee a_C \in T_V: a_C \in M\} = \bigcup_{a_C \in T_V} M_p(a_C)$$

$$\underline{A_V} := \bigcap_{M \in A_V} M = \bigcap_{a_C \in T_V} \underline{M_p(a_C)}$$

Sei nun $a \in C \in T$, dann folgt für alle $b \in \underline{M_p(a)}$, daß $a \sqsubset b$. Denn angenommen es gäbe $b \in \underline{M_p(a)}$ mit $a \not\sqsubset b$, dann folgt wegen 2.2.7: $M_p(a) \not\subset M_p(b)$ im Widerspruch zu $b \in \underline{M_p(a)}$. Damit gilt $\underline{M_p(a)} \subset C$ für jedes $a \in C$, also insbesondere $\underline{M_p(a_C)} \subset C$. Offenbar ist dann $\underline{A_V} \subset \bigcap_{a_C \in T_V} C = \bigcap_{C \in T} C = \underline{T}$.

Sei jetzt $a \in \underline{A_V}$ beliebig, dann gibt es $b_1,..,b_n \in P_o$ mit $kl(b_j,V)$, $j=1,..,n$ und $a \sqsubset \bigsqcup_{i=1}^{n} b_i$. Damit gilt:

$$A_V \subset M_p(a) \subset M_p(\bigsqcup_{j=1}^{n} b_j) = \bigcup_{j=1}^{n} M_p(b_j)$$

Seien $b_1,..,b_m$ nach Umnummerierung die Elemente der Überdeckung, $m \leq n$, für die gilt: $A_v \cap M_p(b_j) \neq \emptyset$, $j = 1,..,m$, dann ist wegen $A_v \subset M_p(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j)$ zu zeigen: $kl(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j, V^6)$

Seien $M,M' \in M_p(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j)$, dann gibt es $i,k \in \{1,..,m\}$ mit $M \in M_p(b_i)$ und $M' \in M_p(b_k)$ und $M_p(b_i) \cap A_v \neq \emptyset \neq M_p(b_k) \cap A_v$.

Wir zeigen zunächst den Hilfssatz: $\bigwedge A,A' \in A_v$: $n(A,A';V^2)$

Beweis: Seien $a \in A$, $a' \in A'$, dann gibt es $a_c, a'_c \in T_v$ mit $a_c \in A$, $a'_c \in A'$ und $kl(a_c,V)$ und $kl(a'_c,V)$. Wegen der totalen Ordnung gilt dazu $a_c \sqcap a'_c \neq 0$, also $kl(a_c \sqcup a'_c, V^2)$. Mit $b := a \sqcap a_c \neq 0$ und $b' := a' \sqcap a'_c \neq 0$ gibt es ein $\tau \in V^2$ mit $\tau b \sqcap b' \neq 0$, so daß mit $\tau a \sqcap a' \neq 0$ die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Nun gilt für alle $N,N' \in M_p(b_1)$, daß $n(N,N';V)$ (2.2.13). Mit 2.2.17 und $V = W$ folgt dann für alle $N,N' \in M_p(b_1) \cup A_v$, daß $n(N,N';V^4)$ und schließlich für alle $N,N' \in M_p(b_i) \cup A_v \cup M_p(b_k)$ die Nachbarschaftsordnung $n(N,N';V^6)$, also insbesondere $n(M,M';V^6)$. Mit 2.2.13 folgt dann $kl(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j, V^6)$ bzw. $kl(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j, U)$. Aus $A_v \subset M_p(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j)$ folgt $\underline{M_p(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j)} \subset \underline{A_v}$, d.h. $\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j \in \underline{A_v} \subset \underline{T}$. □

Mit dem Zornschen Lemma folgt aus Satz 2.2.18, daß jeder Cauchy-Präfilter C einen minimalen Cauchy-Präfilter C_m enthält.

2.2.19 Definition: $E := \{ x \mid x := C_m, C \in \mathcal{C} \}$ sei die Menge der minimalen Cauchy-Präfilter; die Elemente von E heißen Punkte oder auch Ereignisse.

2.2.20 Satz: Jeder Cauchy-Präfilter C enthält genau einen minimalen Cauchy-Präfilter $x \in E$.

Beweis: Angenommen $x,y \in E$ mit $x,y \in C$, dann ist $x = y$ zu zeigen. Sei $\xi := \{c \in C \mid c \in x \wedge c \in y\}$, dann ist ξ ein Präfilter auf P. Sei $U \in \mathcal{B}$ und $V \in \mathcal{B}$ mit $V^2 \subset U$. Da $x,y \in C$, gibt es $b_x \in x$ und $b_y \in y$ mit $kl(b_x,V)$ und $kl(b_y,V)$. Aus $b_x,b_y \in C$ folgt $b_x \sqcap b_y \neq 0$ und damit $kl(b_x \sqcup b_y, V^2)$. Da $b_x \sqcup b_y \in x,y$ folgt $b_x \sqcup b_y \in \xi$, also ξ ist ein Cauchy-Präfilter. Wegen $\xi \subset x,y$ und x,y minimal, folgt $x = \xi = y$. □

2.3 Topologie des Ereignisraumes

Auf der Ereignismenge E (2.2.19) erzeugen die Prozesse auf kanonische Weise eine uniforme Struktur, deren Eigenschaften im folgenden untersucht werden.

2.3.1 Definition: $\tilde{a} := \{x \in E \mid a \in x\}$, $a \in P$

$\tilde{P} := \{a \mid a \in P\}$

Offenbar ist $x \in \tilde{a}$ und $a \in x$ äquivalent.

2.3.2 Definition:

$N_V := \{(x,y) \in E \times E \mid \bigvee a \in P: a \in x,y \wedge kl(a,V)\}$

$N := \{N_V \mid V \in \mathcal{B}\}$

2.3.3 Satz: N ist eine abzählbare Nachbarschaftsbasis einer uniformen Struktur auf E (vgl.[BGT]II, §1.1).

Beweis:

(i): Seien N_U, $N_V \in N$, dann gibt es $W \in \mathcal{B}$ mit $W \subset U \cap V$. Sei $(x,y) \in N_W$, dann gibt es $a \in P$ mit $a \in x,y$ und $kl(a,W)$, also $kl(a,U)$ und $kl(a,V)$, d.h. $(x,y) \in N_U \cap N_V$.

(ii): $\Delta := \{(x,x) \mid x \in E\} \subset N_V \in N$, denn x Cauchy-Präfilter auf P, d.h. zu $V \in \mathcal{B}$ gibt es $a \in x$ mit $kl(a,V)$, also $(x,x) \in N_V$. (iii): $N_V^{-1} = N_V$ per Definition.

(iv): zu zeigen: $\bigwedge N_U \in N \bigvee N_V \in N: N_V^2 \subset N_U$

Sei $N_U \in N$, , dann gibt es $V \in \mathcal{B}$ mit $V^2 \subset U$. Sei $(x,z) \in N_V^2$, d.h.es gibt $y \in E$: (x,y), $(y,z) \in N_V$, also gibt es $a,b \in P$ mit $a \in x,y$ und $b \in y,z$ mit $kl(a,V)$ und $kl(b,V)$. Da $a \cap b \neq 0$ folgt mit 2.2.7 (ii) $kl(a \cup b, V^2)$.

Mit $a \sqcup b \in x,z$ und $kl(a \sqcup b, U)$ folgt $(x,z) \in N_u$.

(v): Die Abzählbarkeit von N folgt aus der Abzählbarkeit von P (Axiom 1) und der Definition von $\mathcal{B}$ (2.1.1) □

Den uniformen Raum (E,N) bezeichnen wir im folgenden nur noch mit E.

2.3.4 Satz: E ist ein Hausdorff-Raum und damit metrisierbar.

Beweis:

Sei $(x,y) \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}} N_V$, d.h.zu jedem $V \in \mathcal{B}$ gibt es ein $a_V \in P$ mit $a_V \in x,y$ und $kl(a_V, V)$. Dann bildet die Menge $\{a_V \mid V \in \mathcal{B}\}$ eine Präfilterbasis ($a_V \sqcap a_W \neq 0$, denn $a_V, a_W \in x$), die einen Cauchy-Präfilter A erzeugt, der in x und y enthalten ist. Aus der Minimalität von x und y folgt dann $x = A = y$. Die Metrisierbarkeit von E folgt aus 2.3.3 und der Hausdorffeigenschaft nach [BGT]IX, §2.4 Theorem 1. □

2.3.5 Lemma

(i) $a \sqsubset b \Longrightarrow \tilde{a} \subset \tilde{b}$

(ii) $\tilde{0} = \emptyset$

(iii) $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \widetilde{a \sqcap b}$

(iv) $\tilde{a} \cup \tilde{b} \subset \widetilde{a \sqcup b}$

(v) F Präfilter auf $P \Longrightarrow \tilde{F} := \{\tilde{a} \in \tilde{P} \mid a \in F\}$ Filterbasis auf E

(vi) F Filter auf $E \Longrightarrow \check{F} := \{a \in P \mid \tilde{a} \in F\}$ Präfilter auf P

Beweis:

(i) $x \in \tilde{a} \Longrightarrow a \in x \Longrightarrow b \in x \Longrightarrow x \in \tilde{b}$

(ii) Angenommen $x \in \tilde{\emptyset} \Longrightarrow 0 \in x$, Widerspruch, da x Präfilter.

(iii) $a \sqcap b \sqsubset a, b \overset{(i)}{\Longrightarrow} \widetilde{a \sqcap b} \subset \tilde{a}, \tilde{b} \Longrightarrow \widetilde{a \sqcap b} \subset \tilde{a} \cap \tilde{b}$.
Sei $x \in \tilde{a} \cap \tilde{b} \Longrightarrow a, b \in x \Longrightarrow a \sqcap b \in x \Longrightarrow x \in \widetilde{a \sqcap b}$.

(iv) $a, b \sqsubset a \sqcup b \overset{(i)}{\Longrightarrow} \tilde{a}, \tilde{b} \subset \widetilde{a \sqcup b} \Longrightarrow \tilde{a} \cup \tilde{b} \subset \widetilde{a \sqcup b}$.

(v) Folgt aus (ii) und (iii).

(vi) Folgt aus (i), (ii) und (iii). □

2.3.6 Lemma:

Sei $A \times A \subset N_v$ und $A := \{M \in M_p \mid A \in \tilde{M}\}$ dann folgt für alle $M, M' \in A$: $n(M, M'; V)$ (vgl.2.2.6 und 2.2.12). [1]

Beweis:

Seien $m \in M$, $m' \in M'$, dann folgt: $\tilde{m} \cap A \neq \emptyset \neq \tilde{m}' \cap A$.

Seien $x \in \tilde{m} \cap A$, $y \in \tilde{m}' \cap A$, dann gibt es $a \in P$ mit $a \in x, y$ und $kl(a, V)$. Wegen $m \in x$ und $m' \in y$ folgt $n := m \sqcap a \neq 0$ und und $n' := m' \sqcap a \neq 0$ und es gibt $\tau \in V$ mit $\tau n \sqcap n' \neq 0$, also $\tau m \sqcap m' \neq 0$. □

2.3.7 Satz:

(i) C Cauchy-Präfilter auf P $\Longrightarrow$ $\tilde{C}$ Cauchy-Filterbasis auf E

(ii) C Cauchy-Filter auf E $\Longrightarrow$ ξ Cauchy-Präfilter auf P

(iii) C minimaler Cauchy-Filter auf E $\Longrightarrow$ ξ minimaler Cauchy-Präfilter auf P.

Beweis:

(i) Sei $N_v \in \mathcal{N}$. Zu $V \in \mathcal{B}$ gibt es $a \in C$ mit $kl(a, V)$. Seien $x, y \in \tilde{a}$, $\tilde{a} \in \tilde{C}$, dann folgt $a \in x, y$ und mit $kl(a, V)$ gilt

1) Insbesondere gilt: $kl(a, V) \Longleftrightarrow \tilde{a} \times \tilde{a} \subset N_v$ (aus 2.3.6 und 2.2.13)

$(x,y) \in N_V$, also $\tilde{a} \times \tilde{a} \subset N_V$ (offenbar sind kl(a,V) und $\tilde{a} \times a \subset N_V$ äquivalent).

(ii) zu zeigen: zu $U \in \mathcal{B}$ gibt es $\tilde{a} \in C$ mit kl($\blacksquare$.U). Sei $V \in \mathcal{B}$ mit $V^4 \subset U$ und $c \in C$ mit $c \times c \subset N_V$.

Sei $A := \{M \in M_p \mid c \in \tilde{M}\}$ und $\underline{A} := \bigcap_{M \in A} M$. Mit 2.3.6 folgt dann $n(M,M';V)$ für alle $M,M' \in \mathcal{A}$. Wie in Satz 2.2.18 gibt es dann zu $b \in \underline{A}$ eine V-kleine, endliche Überdeckung $b \sqsubset \bigsqcup_{i=1}^{n} b_i$, die eine Teilüberdeckung $\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j$ enthält, so daß $A \subset M_p(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j)$ und $kl(\bigsqcup_{j=1}^{m} b_j, V^4)$. Sei $a := \bigsqcup_{j=1}^{m} b_j$ und $x \in c$, dann folgt: $M_p(x) = \{M \in M_p \mid x \subset M\} \subset A \subset M_p(a)$, also $a \in \underline{M_p(a)} \subset \underline{M_p(x)}$ und mit $\underline{M_p(x)} = x$ (2.2.9) folgt $x \in \tilde{a}$, also $c \subset \tilde{a}$ und damit $\tilde{a} \in C$.

(iii) Sei F ein Cauchy-Präfilter auf P mit $F \subset C$. Nach (i) ist $\hat{F}$ Cauchy-Filterbasis auf E mit $\hat{F} \subset C$. Sei G der von $\hat{F}$ erzeugte Cauchy-Filter, dann ist G in C enthalten, also $G = C$, so daß $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}$. Bleibt zu zeigen: $F = \mathfrak{C}$.

Sei $a \in F \Longrightarrow \tilde{a} \in \hat{F} \subset G \Longrightarrow a \in \mathfrak{C}$

Sei $a \in \mathfrak{C} \Longrightarrow \tilde{a} \in G$ dann gibt es $\tilde{b} \in \hat{F} : \tilde{b} \subset \tilde{a} \Longrightarrow b \in F$

$\Longrightarrow a \in F$. □

2,3,8 Satz: E ist vollständig.

Beweis:

Sei C ein Cauchy-Filter auf E. nach 2.3.7 (ii) ist $\mathfrak{C}$ ein Cauchy-Präfilter und sei x der eindeutig bestimmte, minimale Cauchy-Präfilter mit $x \subset \mathfrak{C}$ (vgl.2.2.20), also $\tilde{x} \subset C$ und $\tilde{x}$ ist

Cauchy-Filterbasis auf E (2.3.7 (i)). Zu zeigen: der von $\tilde{x}$ erzeugte Filter ist feiner als der Umgebungsfilter von x. Sei dazu $N_V(x)$ eine Umgebung von x. Da x Cauchy-Präfilter, gibt es zu $V \in \mathcal{B}$ ein $a \in x$ mit kl(a,V). Sei $y \in \tilde{a}$, dann folgt wegen $a \in x,y$ und kl(a,V), daß $(x,y) \in N_V$, also $y \in N_V(x)$ und somit $\tilde{a} \subset N_V(x)$. Damit ist $N_V(x)$ aus dem von $\tilde{x}$ erzeugten Filter. □

2.3.9 Satz: Jede Cauchy-Filterbasis $\tilde{x}$ mit $x \in E$ bildet eine offene Basis des Umgebungsfilters von x.

Beweis:
Sei $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x und $F(\tilde{x})$ der von $\tilde{x}$ erzeugte Filter, dann gilt mit 2.3.8: $\mathcal{U}(x) \subset F(\tilde{x})$. Nach 2.3.7 (ii) ist $\underbrace{\mathcal{U}(x)}$ Cauchy-Präfilter mit $\underbrace{\mathcal{U}(x)} \subset x$, also $\underbrace{\mathcal{U}(x)} = x$ und damit $\tilde{x} \subset \mathcal{U}(x)$, d.h. $\tilde{x}$ ist Basis von $\mathcal{U}(x)$. Mit $y \in \tilde{a}$ folgt $\tilde{a} \in \tilde{y} \subset \mathcal{U}(y)$, also ist $\tilde{a}$ Umgebung für jedes $y \in \tilde{a}$, d.h. $\tilde{a}$ offen für jedes $\tilde{a} \in \tilde{x}$. □

2.3.10 Satz: E ist separabel (vgl.[BGT]IX, § 2.8, Def.4)

Beweis:
Nach 2.3.9 bildet $\tilde{x}$ eine offene Basis von $\mathcal{U}(x)$ für jedes $x \in E$. Wegen $\tilde{x} \subset \tilde{P}$ ist $\tilde{P}$ eine Basis der von $\mathcal{N}$ induzierten Topologie auf E. Wegen card $(\tilde{P}) \leq$ card (P) ist $\tilde{P}$ abzählbar, (Axiom 1), und mit der Metrisierbarkeit von E (2.3.4) folgt die Separabilität. □

2.3.11 Lemma: $\widetilde{\overline{a \sqcup b}} = \overline{\tilde{a} \cup \tilde{b}}$ (Querstrich bedeutet Abschluß in E)

Beweis:

" $\supset$ ": folgt aus 2.3.5 (iv).

" $\subset$ ": Sei $x \in \widetilde{\overline{a \sqcup b}}$, dann ist zu zeigen: $\bigwedge U \in \mathcal{U}(x) : U \cap (\tilde{a} \cup \tilde{b}) \neq \emptyset$

Sei $U \in \mathcal{U}(x) \Longrightarrow U \cap \widetilde{a \sqcup b} \neq \emptyset$. Da $\tilde{x}$ Basis des Umgebungsfilters gibt es $0 \neq c \in x$ mit $\tilde{c} \subset U \cap \widetilde{a \sqcup b}$, d.h. $c \sqsubset a \sqcup b$. Wegen der Distributivität von P (Axiom 1) gilt dann oBdA: $c \sqcap a \neq 0$. Damit folgt, $\tilde{c} \cap \tilde{a} \neq \emptyset$, $U \cap \tilde{a} \neq \emptyset$ und $U \cap (\tilde{a} \cup \tilde{b}) \neq \emptyset$, also $x \in \overline{\tilde{a} \cup \tilde{b}}$. Aus $\widetilde{a \sqcup b} \subset \overline{\tilde{a} \cup \tilde{b}}$ folgt dann $\widetilde{\overline{a \sqcup b}} \subset \overline{\tilde{a} \cup \tilde{b}}$. □

2.3.12 Satz: E ist lokal-kompakt.

Beweis:

Sei $x \in E$ und $\tilde{a} \in \tilde{x}$ eine Umgebung von $x (\tilde{x} \subset \mathcal{U}(x))$.

Wir zeigen, daß eine beliebig kleine, endliche Überdeckung von $\tilde{a}$ existiert. Da die abgeschlossenen Nachbarschaften von N ein Fundamentalsystem bilden ([BGT] II, § 1,2 Corollary 2), geben wir $\overline{N_v} \in N$ vor. Zu V und a gibt es $b_1, .., b_n \in P_o$ mit $kl(b_j, V)$ und $a \sqsubset \bigsqcup_{i=1}^{n} b_i$, $j=1,..,n$ (Axiom 4). Damit gilt:

$\tilde{a} \subset \widetilde{\bigsqcup_{i=1}^{n} b_i} \subset \overline{\bigsqcup_{i=1}^{n} b_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{b}_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\tilde{b}_i}$. Aus $kl(b_j, V)$ folgt $\tilde{b}_j \asymp \tilde{b}_j \subset N_v$ und damit ist $\overline{\tilde{b}_j}$ klein von der Ordnung $\overline{N_v}$. Nach [BGT] II,§4.2 Theorem 3 ist dann $\tilde{a}$ präkompakt. Wegen der Vollständigkeit von E ist dann $\overline{\tilde{a}}$ kompakt. □

3. Die Struktur der Raumzeittransformationen

Nach der Konstruktion von Punkten mit Hilfe von minimalen Cauchy-Präfiltern lassen sich die Reproduktionen als Verbandsautomorphismen auf kanonische Weise zu Punktabbildungen der Ereignismenge erweitern. Dabei bleibt sowohl der Punktbegriff, als auch der Umgebungsbegriff erhalten. Aus der Verkettung der topologischen Strukturen mit der Präuniformität (2.1.10) folgt darüber hinaus, daß die Punkttransformationen zu uniformen Automorphismen werden.

3.1 Reproduktionen als Ereignistransformationen

3.1.1 Definition: Sei $\tau \in R$ und $x \in E$, dann:

(i) $\tilde{\tau}x := \{\tau a \mid a \in x\}$

(ii) $\tilde{R} := \{\tilde{\tau} \mid \tau \in R\}$

3.1.2 Lemma: $\tilde{\tilde{\tau}}\tilde{a} = \widetilde{\tau a}$

Beweis:

$\tilde{\tilde{\tau}}\tilde{a} = \{\tilde{\tau}x \mid x \in \tilde{a}\} = \{\tilde{\tau}x \mid a \in x\}$

$= \{\tilde{\tau}x \mid \tau a \in \tilde{\tau}x\} = \{y \mid \tau a \in y\}$

$= \widetilde{\tau a}$

3.1.3 Satz: Für $x \in E$ und $\tau \in R$ ist $\tilde{\tau}x$ ein minimaler Cauchy-präfilter. $\tilde{\tau}: E \to E$ ist ein uniformer Automorphismus.

Beweis:
Die durch den Verbandsautomorphismus $\tau \in \mathrm{Aut}(P)$ induzierte Abbildung $\tilde{\tau}$ führt minimale Cauchy-Präfilter in minimale Cauchy-Präfilter über. $\tilde{\tau}$ ist bijektiv. Sei $N_V \in \mathcal{N}$ und $\tilde{\tau} \in \tilde{R}$ gegeben. Zu $V \in \mathcal{B}$ und $\tau \in R$ gibt es $U \in \mathcal{B}$ mit $\tau U \tau^{-1} \subset V$. Sei $(x,y) \in N_u$, dann gibt es $a \in P$ mit $a \in x,y$ und $kl(a,U)$. Dann ist $\tau a \in \tilde{\tau}x$, $\tilde{\tau}y$ und aus $b,c \sqsubset \tau a$ folgt $\tau^{-1}b, \tau^{-1}c \sqsubset a$, also gibt es $\sigma \in U$ mit $\sigma\tau^{-1}b \sqcap \tau^{-1}c \neq 0$, $\tau\sigma\tau^{-1}b \sqcap c \neq 0$ und das heißt: $kl(\tau a, \tau U \tau^{-1})$. Damit folgt $(\tilde{\tau}x, \tilde{\tau}y) \in N_{\tau U \tau^{-1}} \subset N_V$. Analoges gilt für τ^{-1}. □

3.1.4 Satz:
(i) $\sim : \tau \to \tilde{\tau}$ ist ein Homomorphismus von R in die Gruppe der uniformen Automorphismen von E.
(ii) Die durch den Isomorphismus $\tilde{R} \cong R|_{\mathrm{Kern}\sim}$ auf $\tilde{R}$ abgebildete Hausdorff-Topologie wird durch die Mengen $\widetilde{R(a)} = \tilde{R}(\tilde{a}) := \{\tilde{\tau} \in \tilde{R} \mid \tilde{\tau}\tilde{a} \sqcap \tilde{a} \neq \emptyset\}$, $a \in P_o$ als Umgebungssubbasis erzeugt.

Beweis: (i): $\widetilde{\tau\circ\sigma}x = \{\tau\sigma a \mid a \in x\} = \tilde{\tau}\{\sigma a \mid a \in x\} = \tilde{\tau}\circ\tilde{\sigma}x$
(ii) Unter Verwendung von [BGT] III, § 2.6 Prop.17 wird $\tilde{R}$ mit der algebraischen Isomorphie $\tilde{R} = \tilde{R}|_{\mathrm{Kern}\sim}$ zur topologischen Gruppe, in der die Mengen $\widetilde{R(a)}$, $a \in P_o$, eine Subbasis für die Umgebungen von $\tilde{id}$ bilden. $\tilde{R}$ Hausdorffsch ist dann äquivalent zur Abgeschlossenheit von $K := \mathrm{Kern}\sim$ (vgl. [BGT] III, § 2.6 Prop.18a).

Angenommen es gibt $\sigma \in \overline{K}$ und $\sigma \notin K$, dann ist $\tilde{\sigma} \neq \widetilde{id}$, d.h.es gibt $x \in E$ mit $\tilde{\sigma}x \neq x$. Aus E Hausdorffsch folgt dann, daß es ein $N_v \in \mathcal{N}$ gibt mit $N_v(\tilde{\sigma}x) \cap N_v(x) = \emptyset$. Zu $V \in \mathcal{B}$ und $\sigma \in R$ gibt es $U \in \mathcal{B}$ mit $\sigma U \sigma^{-1} \subset V$. Sei $W \in \mathcal{B}$ mit $W \subset U \cap \sigma U \sigma^{-1}$ und da x Cauchy-Präfilter, gibt es $b \in x$ mit kl(b,W). Damit folgt für jedes $y \in \tilde{b}$: $b \in x,y$ und mit kl(b,W) folgt $\tilde{b} \subset N_w(x) \subset N_v(x)$. Aus $\sigma b \in \tilde{\sigma}x$ und $kl(\sigma b, \sigma W \sigma^{-1})$ folgt $\widetilde{\sigma b} \subset N_{\sigma W \sigma^{-1}}(\tilde{\sigma}x)$ und mit $\sigma W \sigma^{-1} \subset \sigma U \sigma^{-1} \subset V$ gilt $\widetilde{\sigma b} \subset N_v(\tilde{\sigma}x)$, also $\widetilde{\sigma b} \cap \tilde{b} = \emptyset$. Aus $\sigma \in \overline{K}$ folgt $\sigma R(b) \cap K \neq \emptyset$, also gibt es $\tau \in \sigma R(b) \cap K$ mit $\sigma b \sqcap \tau b \neq 0$, d.h. $\widetilde{\sigma b} \cap \widetilde{\tau b} \neq \emptyset$. Wegen $\tau \in K$ gilt $\tilde{\tau}x = x$ für alle $x \in E$, also $\widetilde{\tau b} = \mathcal{B}$ und mit $\widetilde{\sigma b} \cap \tilde{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ der gewünschte Widerspruch. Noch zu zeigen: $\widetilde{R(a)} = \tilde{R}(\tilde{a})$

$$\widetilde{R(a)} = \{\tilde{\tau} \mid \tau a \sqcap a \neq 0\} = \{\tilde{\tau} \mid \widetilde{\tau a} \cap \tilde{a} \neq \emptyset\}$$

$$= \{\tilde{\tau} \mid \widetilde{\tau a} \cap \tilde{a} \neq \emptyset\} = \tilde{R}(\tilde{a}). \quad \square$$

(3.1.2)

Wie üblich bezeichnen wir nun mit $\tilde{R}$ die in 3.1.4 erhaltene topologische Gruppe.

3.1.5 Definition: Die Mengen

$$\mathcal{U}(N_v) := \{(\tilde{\sigma},\tilde{\tau}) \in \tilde{R} \times \tilde{R} \mid \bigwedge x \in E: (\tilde{\sigma}x, \tilde{\tau}x) \in N_v\},\ N_v \in \mathcal{N}$$

bilden eine Nachbarschaftsbasis $\tilde{R}_u$ der Uniformität der uniformen Konvergenz auf $\tilde{R}$ (vgl. [BGT] X, § 1.1 ff).

3.1.6 Satz: Die durch die Subbasis $\{\widetilde{\tau R(a)} \mid a \in P,\ \tau \in \tilde{R}\}$ induzierte Topologie und die Topologie der uniformen Konvergenz auf $\tilde{R}$ sind äquivalent.

Beweis:

Wegen [BGT] III, § 1.2 Prop.1 können wir uns auf Umgebungsbasen der Identität beschränken.

a) $\bigwedge \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{B}} \bigvee \mathcal{W}(N_u) \in \tilde{R}_u : \mathcal{W}(N_u)\,(id) \subset \tilde{V}$

Sei $\tilde{V} := \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{R(a_i)}$ und $b_1^i, -, b_{n_i}^i$ Kern von a_i, $i = 1,.., n$

Sei $U := \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n_i} R(b_j^i)$ und $\tilde{\tau} \in \mathcal{W}(N_u)\,(id)$. Dann folgt für alle $x \in E$, daß $(x, \tilde{\tau}\, x) \in N_u$, d.h. es gibt $a \in P$ mit $a \in x, \tilde{\tau}\, x$ und $kl(a,U)$ für jedes $x \in E$. Sei also $x_j^i \in \hat{D}_j^i$ für alle $i = 1,..,n$ und $j = 1,..,n_i$, dann gibt es $c_j^i \in P$ mit $c_j^i \quad x_j^i, \tilde{\tau}\, x_j^i$ und $kl(c_j^i, U)$ für alle $i \leq n$ und $j \leq n_i$. Damit gibt es zu jedem Element $d_j^i \in \tilde{\tau} x_j^i$ (minimaler Cauchy-Präfilter) ein $\sigma \in U$ mit $\sigma(b_j^i \sqcap c_j^i) \sqcap (d_j^i \sqcap c_j^i) \neq 0$, also $\sigma b_j^i \sqcap d_j^i \neq 0$ und somit $\widetilde{\sigma b_j^i} \cap \tilde{d}_j^i \neq \emptyset$. Demnach hat jedes $\tilde{d}_j^i$ der Umgebungsbasis von $\tilde{\tau} x_j^i$ einen nichtleeren Schnitt mit $\bigcup_{\sigma \in U} \widetilde{\sigma b_j^i}$, also $\tilde{\tau} x_j^i \in \overline{\bigcup_{\sigma \in U} \widetilde{\sigma b_j^i}}$ und damit $\tilde{\tau} x_j^i \in \tilde{\tilde{a}}_i$ für jedes $i = 1,..,n$ und $j = 1,..,n_i$. Da $x_j^i \in \tilde{a}_i$ und $\tilde{a}$ offen in E folgt $\widetilde{\tau a_i} \cap \tilde{a}_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1,-,n$, also $\tilde{\tau} \in \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{R(a_i)}$.

b) $\bigwedge \mathcal{W}(N_u) \in R_u \bigvee \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{B}} : \tilde{V} \subset \mathcal{W}(N_u)\,(id)$

Sei $x \in E$, $V \in \mathcal{B}$ mit $V^3 \subset U$. Wir wollen zeigen: Zu $\tilde{\tau} \in V$ gibt es $c \in P$ mit $c \in x, \tilde{\tau} x$ und $kl(c,U)$.

Zu $x, \tilde{\tau} x \in E$ gibt es $a,b \in P$ mit $a \in x$, $b \in \tilde{\tau} x$ und $kl(a,V)$ und $kl(b,V)$ (Cauchy-Präfilter). Sei $c := a \sqcup b$, dann folgt für alle $a', b' \sqsubset c$, daß es $\sigma \in V^3$ gibt mit $\sigma a' \sqcap b' \neq 0$. Denn sei oBdA $a' \sqsubset a$ und $b' \sqsubset b$, dann gibt es $\mu \in V$ mit $\mu a' \sqcap d' \neq 0$

mit $d' := \tau^{-1}d$ und $d := \tau a \sqcap b \neq 0$. Sei $e' := \mu a' \sqcap d'$, dann folgt $\tau e' =: e \sqsubset d$ und damit gibt es $\nu \in V$ mit $\nu e \sqcap b' \neq 0$, also $\nu\tau\mu a' \sqcap b' \neq 0$, d.h. $kl(c,V^3)$. Mit $kl(c,U)$ folgt dann $(x,\tilde{\tau}x) \in N_u$. □

3.1.7 Corollar: $\tilde{R}$ operiert stetig auf F.

Beweis: s. [BGT] X, § 1.6 Prop.9. □

Sei Γ die topologische Gruppe aller uniformen Automorphismen auf E, topologisiert mit der Topologie der uniformen Konvergenz (vgl. [BGT] X, § 3 Ex.16a). Γ_z bzw. $\tilde{R}_z$ sei die zu Γ bzw. $\tilde{R}$ gehörende zweiseitige Uniformität (vgl. [BGT] III,§3,Ex.6). Für die zweiseitige Uniformität G_z einer topologischen Gruppe G ist die Menge $\{u_d \cap u_s \mid u_d \in G_d, u_s \in G_s\}$ eine Nachbarschaftsbasis, wobei u_d eine Nachbarschaft der rechtsseitigen Uniformität G_d ist mit $u_d := \{(x,y) \in G \times G \mid yx^{-1} \in U\}$, U Umgebung der id, und analog für die linksseitige Nachbarschaft $u_s := \{(x,y) \mid x^{-1}y \in U\}$ von G_s.

3.1.8 Satz: Jeder $\tilde{R}_z$ - Cauchy-Filter auf $\tilde{R}$ konvergiert in Γ. Die Menge $\bar{R}$ der Grenzwerte bildet eine topologische Untergruppe von Γ, die bezüglich ihrer zweiseitigen Uniformität vollständig ist.

Beweis:

Nach Satz 3.1.6 stimmt die von Γ auf $\tilde{R}$ induzierte Topologie mit der Topologie von $\tilde{R}$ überein, d.h. $\tilde{R}$ ist topologische Untergruppe von Γ . Demnach ist die Einschränkung $\Gamma_z \mid \tilde{R}$ die zweiseitige Uniformität $\tilde{R}_z$. Da Γnach [BGT] X, §3 Ex.16 c bezügl. Γ_z vollständig ist, konvergiert jeder $\tilde{R}_z$ -Cauchy-Filter in Γ und $\bar{R}$ ist der Abschluß von $\tilde{R}$ in Γ([BGT] II, §3.9 Cor.1). Damit wird $\bar{R}$ eine topologische Untergruppe von Γ ([BGT] ,III, §2.1 Prop.1) und als abgeschlossene Untergruppe vollständig ([BGT] III, §3.3) bezüglich der von Γ_z induzierten Uniformität $\Gamma_z \mid \bar{R} = \bar{R}_z$. □

3.1.9 Corollar: $\bar{R}$ ist $\bar{R}_z$-vollständig und $\tilde{R}$ ist dicht in $\bar{R}$, also läßt sich $\bar{R}$ mit der $\tilde{R}_z$-Vervollständigung $\hat{R}$ von $\tilde{R}$ identifizieren. (Offenbar sind $\bar{R}$-Abschluß und $\tilde{R}_z$-Vervollständigung äquivalente Operationen auf $\tilde{R}$ [BGT] II, §3.9 Cor.1).

Wir schreiben im folgenden nur noch $\hat{R}$ anstatt $\bar{R}$.

3.1.10 Corollar: $\hat{R}$ operiert stetig auf E.

Beweis:

$\hat{R}$ ist mit der Topologie der uniformen Konvergenz versehen. Mit [BGT] X, § 1.6 Prop.9 folgt die Behauptung. □

Sei $\hat{U} \in \tilde{\mathfrak{B}}$ und $\hat{U}[\tilde{a}] := \bigcup_{\sigma \in \hat{U}} \sigma\tilde{a}$ und $\bar{\hat{U}}$ der Abschluß von $\hat{U}$ in $\hat{R}$.

3.1.11 Lemma: $\mathfrak{U}[\tilde{a}] = \overline{\mathfrak{U}}[\tilde{a}]$

Beweis:

" $\subset$ " : klar wegen $\mathfrak{U} \subset \overline{\mathfrak{U}}$

" $\supset$ " : Offenbar sind $\mathfrak{U}[a]$ und $\overline{\mathfrak{U}}[a]$ als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen in E, so daß es zu zeigen genügt: $\overline{\mathfrak{U}}[a] \subset \overline{\mathfrak{U}[a}$

Sei $x \in \overline{\mathfrak{U}}[a]$, dann gibt es $\tau\tilde{a}$ mit $x \in \tau\tilde{a}$ und $\tau \in \overline{\mathfrak{U}}$, also $\tau^{-1}x \in \tilde{a}$. Sei $y := \tau^{-1}x$, dann folgt aus dem stetigen Operieren von $\hat{R}$, daß es zu einer Umgebung v von y eine Umgebung $w := W \times w$ von (τ,y) gibt mit W Umgebung von τ in $\hat{R}$ und w Umgebung von y, für die gilt: $(\sigma,z) \in w \implies \sigma z \in v$. Sei nun $\sigma \in W \cap \overline{\mathfrak{U}} \mid \tilde{R}$, dann folgt mit $y \in \tilde{a}$, daß $\sigma\tilde{a} \cap v \neq \emptyset$. Damit gibt es zu jeder Umgebung u von $x = \tau y$ ein $\sigma \in U$ mit $\sigma\tilde{a} \cap u \neq \emptyset$, also $x \in \overline{\mathfrak{U}[a]}$.□

3.1.12 Corollar: Die $\hat{R}$-Topologie der uniformen Konvergenz stimmt mit der von der Subbasis $\{\tau\hat{R}(\tilde{a}) \mid a \in P, \tau \in \hat{R}\}$ erzeugten (Prozess-) Topologie überein.
$(\hat{R}(\tilde{a}) := \{\tau \in \hat{R} \mid \tau\tilde{a} \cap \tilde{a} \neq \emptyset\})$.

Beweis:

Nach 3.1.6 sind die entsprechenden Topologien auf $\tilde{R}$ äquivalent, so daß nach [BGT] III, § 3.4 Prop.7 die Menge

$\overline{\mathfrak{B}} := \{ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{R}(\tilde{a}_i)} \mid \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{R}(\tilde{a}_i) \in \mathfrak{B} \}$ eine Umgebungsbasis der Identität aus $\hat{R}$ bildet.

(a) $\bigwedge \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{\hat{R}}(\tilde{a}_i) \bigvee \bigcap_{j=1}^{m} \hat{R}(\tilde{b}_j) : \bigcap_{j=1}^{m} \hat{R}(b_j) \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{\hat{R}}(\tilde{a}_i)}$

Wir zeigen zunächst, daß $\tilde{\hat{R}}(\tilde{a})$ dicht in $\hat{R}(a)$ ist (bzgl.der Topologie der uniformen Konvergenz).

Angenommen es gibt $\tau \in R(a)$ und eine offene Umgebung U von τ mit $U \cap \tilde{\hat{R}}(\tilde{a}) = \emptyset$. Sei $\tilde{U} := U \mid \tilde{R}$, dann ist $\tilde{U} \cap \tilde{\hat{R}}(\tilde{a}) = \emptyset$, d.h.: $\bigwedge \sigma \in \tilde{U} : \sigma\tilde{a} \cap \tilde{a} = \emptyset$. Sei $\tilde{U}[\tilde{a}]$ wie in Lemma 3.1.11, dann ist $\tilde{U}[\tilde{a}] \cap \tilde{a} = \emptyset$. Mit 3.1.11 folgt $\tilde{U}[\tilde{a}] = \overline{\tilde{U}}[\tilde{a}]$ und mit $\tilde{U} \subset U \subset \overline{\tilde{U}}$ folgt dann $\tau\tilde{a} \cap \tilde{a} = \emptyset$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist dann auch $\bigcap_i \tilde{\hat{R}}(\tilde{a}_i)$ dicht in $\bigcap_i \hat{R}(\tilde{a}_i)$ und schließlich folgt: $\bigcap_i \hat{R}(\tilde{a}_i) \subset \overline{\bigcap_i \tilde{\hat{R}}(\tilde{a}_i)}$.

(b) $\bigwedge \bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i) \bigvee \bigcap_{j=1}^{m} \tilde{\hat{R}}(\tilde{b}_j) : \overline{\bigcap_{j=1}^{m} \tilde{\hat{R}}(\tilde{b}_j)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$

Sei $\bigcap_i \hat{R}(\tilde{a}_i)$ gegeben. Dann gibt es $b_i \subset a_i$ mit $\tilde{\bar{b}}_i \subset \tilde{a}_i, i = 1,-,n$, (da E regulär). Sei $\tau \in \overline{\bigcap_i \tilde{\hat{R}}(\tilde{b}_i)}$, d.h. für alle Umgebungen U von τ gilt: $U \cap \bigcap_i \tilde{\hat{R}}(\tilde{b}_i) \neq \emptyset$. Sei $\tau\tilde{b}_j \cap \tilde{b}_j = \emptyset$ für $j = \{1,-,n\}$, (sonst fertig), dann folgt $\tau\tilde{\bar{b}}_j \cap \tilde{\bar{b}}_j \neq \emptyset$. Denn sei angenommen $\tau\tilde{\bar{b}}_j \cap \tilde{\bar{b}}_j = \emptyset$, dann existiert eine Nachbarschaft $N_v \in N$ mit $N_v(\tau\tilde{\bar{b}}_j) \cap N_v(\tilde{\bar{b}}_j) = \emptyset$ (vgl. [BGT] II, §4.3 Prop.4) Dann folgt für alle $\tau x \in \tau\tilde{\bar{b}}_j$, daß $N_v(\tau x) \subset N_v(\tau\tilde{\bar{b}}_j)$, also $N_v(\tau x) \cap N_v(\tilde{\bar{b}}_j) = \emptyset$. Zu N_v betrachten wir die Nachbarschaft $\hat{W}(N_v)$ der Uniformität der uniformen Konvergenz auf $\hat{R}$.

$[\hat{W}(N_v)(\tau)](x) = [\{\sigma \in \hat{R} \mid (\tau,\sigma) \in \hat{W}(N_v)\}](x) =$

$$= [\{\sigma \in \hat{R} \mid \bigwedge y \in E : (\tau y, \sigma y) \in N_v\}] (x)$$

$$= \{\sigma x \in E \mid \bigwedge y \in E : (\tau y, \sigma y) \in N_v\}$$

$$\subset \{\sigma x \in E \mid (\tau x, \sigma x) \in N_v\}$$

$$= \{\sigma x \in E \mid \bigvee a \in P: a \in \tau x, \sigma x \wedge kl(a,V)\}$$

$$\subset N_v(\tau x).$$

Damit gibt es eine Umgebung $\hat{W}(N_v)(\tau)$ von τ, so daß für jedes $\sigma \in \hat{W}(N_v)(\tau)$ gilt: $\sigma\tilde{\bar{b}}_j \cap \tilde{\bar{b}}_j = \emptyset$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Aus $\tau\tilde{\bar{b}}_j \cap \tilde{\bar{b}}_j \neq \emptyset$ folgt dann $\tau\tilde{a}_j \cap \tilde{a}_j \neq \emptyset$ und damit $\tau \in \bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$. □

3.1.13 Satz: Die kompakt-offene Topologie auf $\hat{R}$ ist äquivalent zur Topologie der uniformen Konvergenz (bzw.der Prozesstopologie).

Beweis:

(a) Sei $\bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$ gegeben. Zu a_i gibt es $b_i \sqsubset a_i$ so, daß $\tilde{\bar{b}}_i \subset \tilde{a}_i$, $i = 1,..,n$. Da $\tilde{\bar{b}}_i$ kompakt (vgl. 2.3.12) ist, wird $W := \bigcap_{i=1}^{n} \hat{T}(\tilde{\bar{b}}_i, \tilde{a}_i)$, wobei $\hat{T}(\tilde{\bar{b}}, \tilde{a}) := \{\tau \in \hat{R} \mid \tau\tilde{\bar{b}} \subset \tilde{a}\}$, eine Umgebung der Identiät in der kompakt-offen Topologie (vgl. [BGT]X,§3.4 Def.1). Sei $\tau \in W$, dann $\tau\tilde{\bar{b}}_i \subset \tilde{a}_i$, also $\tau\tilde{a}_i \cap \tilde{a}_i \neq \emptyset$, $i = 1,..,n$, d.h. $\tau \in \bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$.

(b) Die Topologie der uniformen Konvergenz ist feiner als die kompakt-offen Topologie (vgl. [BGT] X,§1.3 ExampleIII). □

3.1.14 Satz: $\hat{R}$ ist separabel und metrisierbar.

Beweis: [BGT] X, §3.3 Corollary b) □

3.1.15 Satz: Seien $a_1,..,a_n$ Kerne von $a \in P$ (Quasistarrheit), dann ist $\bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$ präkompakt in $\hat{R}$, versehen mit der zweiseitigen Uniformität $\hat{R}_z$.

Beweis: Nach [BGT] II, §4.2 Theorem 3 ist die Existenz einer V_z-kleinen, endlichen Überdeckung von $\bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$ zu zeigen, $V_z \in \hat{R}_z$.
Sei $V_z := \{(\sigma,\tau) \mid \sigma^{-1}\tau, \tau\sigma^{-1} \in \hat{V}\}$ für $\hat{V} \in \hat{\mathfrak{B}}$. Sei $\hat{U} \in \hat{\mathfrak{B}}$ mit $\hat{U}^2 \subset \hat{V}$. Zu $\hat{U}$ gibt es nach Axiom 3 Kerne $b^i_1,..,b^i_{n_i}$ von a_i $i = 1,..,n$ so, daß $\bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n_i} \hat{R}(\tilde{b}^i_j) \subset \hat{U}$. Sei $A := \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_i$, dann ist $A \in \hat{P}$ und $\bigcup_{\tau \in \bigcap \hat{R}(\tilde{a}_i)} \tau A \subset \overline{\tilde{a}}$ und $\overline{\tilde{a}}$ ist kompakt.

Sei $b := \bigtimes_{i=1}^{n} \bigtimes_{j=1}^{n_i} \tilde{b}^i_j \subset W := \overline{\tilde{a}} \times ... \times \overline{\tilde{a}}$, $m = \sum_{i=1}^{n} n_i$

W ist kompakt und $\hat{R}$ operiert auf $E \times ... \times E$ durch $\tau(x_1,..,x_m) := (\tau x_1,..,\tau x_m)$. Die offene Überdeckung $\{\tau b \mid \tau \in \hat{R}\}$ von W enthält eine endliche Teilüberdeckung $\{\tau_k b \mid k=1,..l\}$.
Zur Konstruktion der Überdeckung von $\bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$ sei $\psi \in \bigcap_{i=1}^{n} \hat{R}(\tilde{a}_i)$ vorgegeben. Wegen $\tilde{b}^i_j \subset A$ gilt $\psi\tilde{b}^i_j \subset \overline{\tilde{a}}$ für alle $j=1,..,n_i$ $i=1,..n$, also $\bigtimes_{i=1}^{n} \bigtimes_{j=1}^{n_i} \psi\tilde{b}^i_j \subset W$, Also trifft $\bigtimes_i \bigtimes_j \psi\tilde{b}^i_j$ ein $\tau_k b$ aus der Überdeckung von W:

$$\emptyset \neq \bigtimes_{i=1}^{n} \bigtimes_{j=1}^{n_i} \psi\tilde{b}_j^i \cap \tau_k b = \bigtimes_i \bigtimes_j \psi\tilde{b}_j^i \cap \bigtimes_i \bigtimes_j \tau_k \tilde{b}_j^i$$

$$= \bigtimes_i \bigtimes_j (\psi\tilde{b}_j^i \cap \tau_k \tilde{b}_j^i) .$$

Damit folgt für alle $i=1,..,n$, $j=1,..,n_i$ und $k \in \{1,..,l\}$: $\psi\tilde{b}_j^i \cap \tau_k \tilde{b}_j^i \neq \emptyset$, d.h. $\tau_k^{-1} \psi \in \bigcap_i \bigcap_j \tilde{R}(\tilde{b}_j^i)$. Schließlich erhalten wir:

$$\psi \in \bigcup_{k=1}^{l} (\tau_k \cdot \bigcap_i \bigcap_j \tilde{R}(\tilde{b}_j^i)) =: \bigcup_{k=1}^{l} T_k$$

Mit ψ ist auch $\psi^{-1} \in \bigcap_i \tilde{R}(\tilde{a}_i)$ und das eben benützte Argument liefert erneut: Es gibt ein $k \in \{1,..,l\}$, so daß für alle $i=1,..,n$ und $j=1,..,n_i$ gilt: $\emptyset \neq \psi^{-1}\tilde{b}_j^i \sigma_k \tilde{b}_j^i$, $\sigma_k \in \tilde{R}$ und damit ist

$$\psi \in \bigcup_{k=1}^{l} (\bigcap_i \bigcap_j \tilde{R}(\tilde{b}_j^i) \cdot \sigma_k) =: \bigcup_{k=1}^{l} S_k$$

Somit ist $\bigcup_{k,j} T_k \cap S_j$ eine endliche Überdeckung von $\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{R}(\tilde{a}_i)$.

Zu zeigen bleibt: $(T_k \cap S_j) \times (T_k \cap S_j) \subset V_z := V_d \cap V_s$ mit

$V_d := \{(\sigma,\tau) \mid \tau\sigma^{-1} \in \tilde{V}\}$ und $V_s := \{(\sigma,\tau) \mid \sigma^{-1}\tau \in \tilde{V}\}$.

Seien $\phi,\psi \in T_k \cap S_j$, d.h. $\phi = \tau_k\alpha = \beta\sigma_j$ und $\psi = \tau_k\gamma = \delta\sigma_j$ mit $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \bigcap_i \bigcap_j \tilde{R}(\tilde{b}_j^i)$. Da $\alpha^{-1}\gamma \in \tilde{U}^2$, folgt $\bar{\alpha}^1\tau_k^{-1}\tau_k\gamma \in \tilde{V}$, also $(\tau_k\alpha,\tau_k\gamma) \in V_s$. Mit $\delta\beta^{-1} \in \tilde{U}^2$ ist $\delta\sigma_j\sigma_j^{-1}\beta^{-1} \in \tilde{V}$ und damit $(\beta\sigma_j,\delta\sigma_j) \in V_d$, also $(\phi,\psi) \in V_s \cap V_d = V_z$. □

3.1.16 Corollar: $\hat{R}$ ist lokal kompakt.

Beweis: $\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{R}(\tilde{a}_i)$ ist nach 3.1.15 präkompakt, also $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{R}(\tilde{a}_i)}$

kompakte Umgebung der Identität von $\hat{R}$ ([BGT] II, §4.2) und damit ist $\tau \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{R}(\tilde{a}_i)$ eine kompakte Umgebung von $\tau \in \hat{R}$.

3.2 Zusammenhang und Transitivität

3.2.1 Lemma: Sei $\hat{V} \subset \hat{R}$ eine kompakte id-Umgebung mit $\hat{V} := \overline{\mathring{V}}$, (Abschluß in $\hat{R}$) und $a \in P$ mit $kl(a,V)$, dann operiert $\hat{V}$ transitiv auf $\tilde{a}$.

Beweis: Da $\hat{R}$ stetig operiert, ist $\Phi_V : \hat{V} \times E \to E$, $\Phi_V(\tau,x) = \tau x$ stetig und nach [BGT] III, §4.1 Prop.1 proper. Sei $x,y \in \tilde{a}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{a}$ mit $x_n \to x$. Aus $kl(a,V)$ folgt"$kl(\tilde{a},\hat{V})$", d.h.: $\bigwedge \tilde{b},\tilde{c} \subset \tilde{a} \bigvee \tau \in \hat{V}: \tau\tilde{b} \cap \tilde{c} \neq \emptyset$. Also gibt es eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \hat{V}$ mit $\tau_n x_n \to y$. Da $\hat{V}$ kompakt, gibt es eine Teilfolge (τ_{n_i}), die gegen ein $\tau \in \hat{V}$ konvergiert. Die Endstücke der Folgen ergeben eine Filterbasis eines Filters F auf $\hat{V} \times E$ mit y als Häufungspunkt von $\Phi_V(F)$. Mit [BGT] I, §10.2 Theorem1 folgt dann $y = \Phi_V(\tau,x) = \tau x$. □

3.2.2 Definition: $a_1,..,a_n \in P_o$ heißt eine Kette zwischen $a \in P_o$ und $b \in P_o$, $\langle a \mid a_1,..,a_n \mid b \rangle$, gdw für alle $i = 1,..,n-1$ gilt:

$a \sqcap a_1 \neq 0 \ \wedge \ a_i \sqcap a_{i+1} \neq 0 \ \wedge \ a_n \sqcap b \neq 0$

3.2.3 Definition: $a \in P_o$ heißt kettenkonnex, K(a), gdw

$$\bigwedge_{b,c \sqsubset a} \bigwedge_{V \in \mathfrak{B}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \in P_o} \bigwedge_{i,j=1..n:} a_i \sqsubset a \wedge kl(a_j,V) \wedge \langle b \mid a_1,..,a_n \mid c \rangle$$

3.2.4 Definition: Sei $d \in P$ und $x,y \in \overline{\tilde{d}}$. x und y heißen durch eine V-Kette aus d verbunden, ch(x,y;V) , gdw

$$\bigwedge_{a \in x} \bigwedge_{b \in y} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{a_1,..,a_n \sqsubset d} \bigwedge_{i=1,..,n:} kl(a_i,V) \wedge \langle a \mid a_1,..,a_n \mid b \rangle$$

3.2.5 Lemma: Die Relation "es gibt ch(x,y;V)" ist eine Äquivalenzrelation zwischen x und y auf $\overline{\tilde{d}}$ (vgl.[BGT] II, §4.4 Def. 3).

Beweis: Reflexivität: Sei $x \in \overline{\tilde{d}}$ und $V \in \mathfrak{B}$, dann gibt es $c \in x$ mit kl(c,V) und $x \in \tilde{c} \cap \overline{\tilde{d}} \neq \emptyset$. Da $\tilde{c}$ Umgebung von x ist, folgt $\tilde{c} \cap \tilde{d} \neq \emptyset$. Sei c': = $c \sqcap d$, dann ist $c' \sqsubset d$ und kl(c',V). Sei nun a,b $\in$ x, dann gilt zunächst für $a \in x$: $\tilde{a} \cap \tilde{c}' = \tilde{a} \cap \tilde{c} \cap \tilde{d}$ und $\tilde{a} \cap \tilde{c}$ ist eine Umgebung von x, also $\tilde{a} \cap \tilde{c} \cap \tilde{d} \neq \emptyset$, d.h. $a \sqcap c' \neq 0$ und analoges gilt für $b \in x$. Damit gilt: $\langle a \mid c' \mid b \rangle$. Die Symmetrie ist trivial.

Transitivität: Seien ch(x,y;V) und ch(y,z;V) gegeben, dann gibt es $b \in y$ mit kl(b,V) und $\tilde{b} \cap \tilde{d} \neq \emptyset$. Sei b': = $b \sqcap d$, dann ist $b' \sqsubset d$ und kl(b',V). Zu $a \in x$ bzw. $c \in z$ gibt es $\langle a \mid a_1,..,a_n \mid b \rangle$ bzw. $\langle b \mid b_1,..,b_m \mid c \rangle$, wobei $a_n \sqcap b \sqsubset b'$ und $b_1 \sqcap b \sqsubset b'$. Dann gilt $\langle a \mid a_1,..,a_n \mid b' \rangle$ und $\langle b' \mid b_1..b_m \mid c$ also $\langle a \mid a_1,..,a_n,b',b_1,..,b_m \mid c \rangle$. □

3.2.6 Definition: $A^d_{x,V} := \{y \in \bar{\tilde{d}} \mid \bigvee ch(x,y;V)\}$ sei die Äquivalenzklasse von x in $\bar{\tilde{d}}$.

3.2.7. Lemma: $A^d_{x,V}$ ist offen und abgeschlossen in $\bar{\tilde{d}}$.

Beweis: Sei $y \in A^d_{x,V}$ und $a \in y$ mit kl(a,V), dann ist $\alpha := \tilde{a} \cap \bar{\tilde{d}}$ eine offene Umgebung von y bzgl. dem topologischen Raum $\bar{\tilde{d}}$. Sei $z \in \alpha$ und $c \in z$, dann folgt mit $a' := a \sqcap d \neq 0$, daß $\langle a' \mid a' \mid c\rangle$ und kl(a',V); denn $\tilde{c} \cap \tilde{a} \cap \tilde{d} \neq \emptyset$, da $\tilde{a} \cap \tilde{c}$ Umgebung von $z \in \bar{\tilde{d}}$, d.h. $c \sqcap a' \neq 0$. Damit folgt für alle $b \in x$ und $\langle b \mid a_1,..,a_n \mid a\rangle$, daß wegen $a_n \sqcap a \sqsubset a'$ auch $\langle b \mid a_1,..,a_n \mid a'\rangle$ gilt und somit $\langle b \mid a_1,..,a_n,a' \mid c\rangle$. Demnach ist $z \in A^d_{x,V}$, also $\alpha \subset A^d_{x,V}$, d.h. $A^d_{x,V}$ ist offen. Da $A^d_{x,V}$ eine Äquivalenzklasse ist, wird das Komplement in $\bar{\tilde{d}}$ als Vereinigung von offenen Mengen offen, also $A^d_{x,V}$ abgeschlossen. □

3.2.8 Lemma: Sei $a \in P$ und K(a), dann ist $\bar{\tilde{a}}$ zusammenhängend.

Beweis: Aus K(a) folgt, daß für $x,y \in \bar{\tilde{a}}$ eine V-Kette $a_1,..,a_n$ aus a existiert mit $\langle\{x\} \mid a_1,..,a_n \mid \{y\}\rangle$, d.h. $A^a_{x,V} = \bar{\tilde{a}}$, für jedes $V \in \mathcal{B}$. Da $\bar{\tilde{a}}$ kompakt, folgt $\bar{\tilde{a}} = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} A^a_{x,V} =: A^a_x$ ist zusammenhängend ([BGT] II, §4.4 Prop.6) □

3.2.9 Lemma: Zu $x \in E$ und $\hat{V} \subset \hat{R}$ kompakt gibt es $a \in x$ mit kl(a,V) und $\bar{\tilde{a}}$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $x \in E$ und $\hat{V}$ kompakt, dann gibt es $b \in x$ mit $kl(b,V)$. Sei $W \in \mathcal{B}$ mit $W^3 \subset V$ und $c \in x$ mit $c \sqsubset b$ und $kl(c,W)$. Zu c gibt es nach Axiom 5 ein $c' \sqsubset c$ mit $K(c')$. Offenbar ist dann $kl(c',W)$. Da $\hat{W}$ transitiv auf $\tilde{c}$ operiert, gibt es $\tau \in W$ mit $\tau c' \in x$. $\tilde{\tau}$ ist stetig, so daß aus dem Zusammenhang von $\overline{\tilde{c}'}$ der Zusammenhang von $\overline{\widetilde{\tau c'}}$ folgt. Aus $kl(c',W)$ folgt $kl(\tau c', \tau W \tau^{-1})$, d.h. $kl(\tau c', W^3)$. □

3.2.10 Satz: E ist lokal zusammenhängend.

Beweis: Sei $x \in E$, dann gibt es nach 3.2.9 zu jedem kompakten $\hat{V} \subset \hat{R}$ ein $a_v \in x$ mit $kl(a_v,V)$ und $\overline{\tilde{a}_v}$ ist zusammenhängend. Dann bildet die Menge $\{\overline{\tilde{a}_v} \mid V \in \mathcal{B}\}$ eine zusammenhängende Umgebungsbasis. Denn sei $a \in x$, dann gibt es $V \in \mathcal{B}$ mit $N_v(x) \subset \tilde{a}$. Zu V gibt es $W \in \mathcal{B}$ mit $W^2 \subset V$ und $\hat{W}$ ist kompakt in $\hat{R}$. Nach 3.2.9 gibt es zu $\hat{W}$ ein $b \in x$ mit $kl(b,W)$ und $\overline{\tilde{b}}$ ist zusammenhängend. Sei $y \in \tilde{b}$, dann ist $b \in x,y$ und $y \in N_w(x)$ und damit $\tilde{b} \subset N_w(x)$. Damit folgt $\overline{\tilde{b}} \subset \overline{N_w(x)} \subset N_v(x) \subset \tilde{a}$. □

3.2.11 Satz: $\hat{R}$ operiert transitiv auf E.

Beweis: Seien $x,y \in E$, $\hat{V} \subset \hat{R}$ eine kompakte id-Umgebung und $a \in x$, $b \in y$ mit $kl(a,V)$, $kl(b,V)$ und $K(a)$, $K(b)$ (vgl.3.2.9). Zu a,b gibt es nach Axiom 5 eine Kette $a_1,..,a_n \in P$ mit $K(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i)$ und $\langle a \mid a_1,..,a_n \mid b \rangle$. Zu $a \sqcap a_1 = :a'$ und $a_n \sqcap b = :b'$ gibt es wegen $K(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i)$ eine V-Kette $b_1,..b_m$ aus

$\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i$ so, daß $<\{x\} \mid a,b_1,..,b_m,b \mid \{y\}>$. Dann ist $kl(a \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{m} b_i \sqcup b, V^{m+2})$ und $\hat{V}^{m+2}$ ist kompakt. Nach Lemma 3.2.1 gibt es dann ein $\tau \in \hat{V}^{m+2}$ mit $\tau x = y$. □

3.2.12 Satz: E ist zusammenhängend.

Beweis: Seien $x,y \in E$, dann gibt es $a \in x$, $b \in y$ mit $K(a)$ $K(b)$ und eine Kette $<a \mid a_1,..,a_n \mid b>$ mit $K(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i)$. Damit gilt $K(a \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i \sqcup b)$, also $z(y) := \overbrace{a \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i \sqcup b}$ ist zusammenhängend. Dann folgt $E = \bigcup_{y \in E} z(y)$ und $x \in \bigcap_{y \in E} z(y) \neq \emptyset$.

Mit [BGT] I, §11.1 Prop.2 folgt die Behauptung. □

4. Die Strukturen des Orbitraumes

Die metrischen bzw. quasimetrischen Abstandsstrukturen werden wie bei J. Tits (1955) aus den Bahnen der Standuntergruppen konstruiert. Wegen der nichtkompakten Reproduzierbarkeit ist die Einführung des sogenannten Isotropiekegels notwendig, der die Menge der Punkte mit quasimetrischen Nullabstand bezüglich dem Fixpunkt einer Standuntergruppe darstellt. Durch ihn wird der Ereignisraum in zusammenhängende Teilmengen zerlegt, in denen die Abstandssphären mit dem Axiom 6 eine lineare Anordnung erhalten.

4.1 Die Bahnen der Standuntergruppen

Es sei $J_x := \{\tau \in \hat{R} \mid \tau x = x\}$ die Standuntergruppe von $x \in E$, J_x^o die id-Komponente von J_x und $J_x^o(\tilde{a}) := \bigcup_{\tau \in J_x^o} \tau\tilde{a}$, $a \in P$.

4.1.1 Definition: $I_x := \overline{\bigcap_{a \in x} J_x^o(\tilde{a})}$ sei der Isotropiekegel von $x \in E$.

Offenbar ist I_x nicht leer und abgeschlossen

4.1.2 Lemma: $y \in \bigcap_{a \in x} J_x^o(\tilde{a}) \implies x \in \overline{J_x^o(y)}$

Beweis: Sei $y \in \bigcap_{a \in x} J_x^o(\tilde{a})$, dann gibt es für jedes $a \in x$

ein $\tau \in J_x^o$ mit $y \in \tau\tilde{a}$, d.h für jede Umgebung U von x gibt es ein $\sigma \in J_x^o$ mit $\sigma y \in U$, also $x \in \overline{J_x^o(y)}$. □

4.1.3 Lemma: $x \in \overline{J_x^o(y)} \Longrightarrow \overline{J_x^o(y)} \subset I_x$

Beweis: Sei $z \in J_x^o(y)$ und $a \in x$, dann gibt es $\tau \in J_x^o$ mit $z \in \tau\tilde{a}$; da $z \in J_x^o(y)$ beliebig, folgt $J_x^o(y) \subset J_x^o(\tilde{a})$ für jedes $a \in x$, also $J_x^o(y) \subset I_x$. Daraus folgt: $\overline{J_x^o(y)} \subset I_x$. □

4.1.4 Lemma: I_x ist die abgeschlossene Vereinigungsmenge der Bahnen $J_x^o(z)$, für die $x \in \overline{J_x^o(z)}$ gilt.

Beweis: Wegen 4.1.3 gilt " $\supset$ ".
Sei nun $y \in I_x$. Sofern $y \in \bigcup_{a \in x} J_x^o(\tilde{a})$, dann folgt mit 4.1.2 die Behauptung. Sei also y aus dem Rand von $\bigcup_{a \in x} J_x^o(\tilde{a})$, dann gibt es eine Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{a \in x} J_x^o(\tilde{a})$ mit $y_i \to y$. Da $y_i \in \bigcup_{a \in x} J_x^o(\tilde{a})$ folgt $x \in \overline{J_x^o(y_i)}$, $i \in \mathbb{N}$, also $y \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{J_x^o(y_i)}}$ und diese Menge ist im Abschluß der Vereinigungsmenge der Bahnen $J_x^o(z)$ mit $x \in \overline{J_x^o(z)}$ enthalten. □

4.1.5 Satz: I_x ist zusammenhängend.

Beweis: Da J_x^o zusammenhängend ist und $\hat{R}$ stetig operiert, ist ist $J_x^o(y)$ zusammenhängend([BGT] I, §11.1 Prop.4).Also ist auch $\overline{J_x^o(y)}$ zusammenhängend ([BGT] I,§11.1 Prop.1) für $y \in E$. Aus

$x \in \bigcap_{x \in \overline{J_x^\circ(z)}} \overline{J_x^\circ(z)} \neq \emptyset$ (der Durchschnitt läuft über alle $\overline{J_x^\circ(z)}$ mit $z \in E$, die x enthalten) folgt nach [BGT] I, §11.1 Prop.2, daß $\overline{\bigcup_{x \in J_x^\circ(z)} J_x^\circ(z)}$ zusammenhängend ist und damit auch I_x. □

4.1.6 Lemma: Sei $A \subset E$ und $\tau \in \hat{R}$, dann gilt: $\tau\bar{A} = \overline{\tau A}$

Beweis: Da τ stetig ist, folgt " $\subset$ ".
" $\supset$ ": Aus $A \subset \bar{A}$ folgt $\tau A \subset \tau\bar{A}$, also $\overline{\tau A} \subset \overline{\tau\bar{A}}$. Da τ Homöomorphismus ist, bleibt $\tau\bar{A}$ abgeschlossen und damit $\overline{\tau A} \subset \tau\bar{A}$. □

4.1.7 Satz: $\tau I_x = I_{\tau x}$ ($\hat{R}$-Invarianz des Isotropiekegels).

Beweis: $\tau I_x = \tau \overline{\bigcup_* J_x^\circ(z)} = \overline{\tau \bigcup_* J_x^\circ(z)} = \overline{\bigcup_* \tau J_x^\circ(z)}$

$= \overline{\bigcup_* J_{\tau x}^\circ(\tau z)} = I_{\tau x}$

Hierbei bedeutet * die Vereinigung über alle $J_x^\circ(z)$ mit $x \in \overline{J_x^\circ(z)}$. □

4.1.8 Definition: Eine Teilmenge $T \subset E$ zerlegt E gdw E/T nicht zusammenhängend ist.

Notation: $C_x(y)$ ist die Komponente von y in E/I_x.

4.1.9 Lemma: $C_x(y)$ ist offen in E/I_x (bzw. in E).

Beweis: E ist lokal zusammenhängend (3.2.10) und E/I_x offen, dann ist auch E/I_x lokal zusammenhängend. Damit ist $C_x(y)$ offen (vgl. [BGT] I, § 11.6 Prop.11). □

4.1.10 Corollar: E/I_x ist die Summe seiner Komponenten.

4.1.11 Satz: Die Komponenten von E/I_x zerlegen E nicht.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $E/C_x(y)$ zusammenhängend ist. Da E/I_x offen in E, folgt $\partial(E/I_x) \subset I_x$. Nach [BGT] I,§11.6 corollary folgt dann $\partial C_x(z) \subset \partial(E/I_x)$, $z \in \overline{E/I_x}^{E}$, also $\partial C_x(z) \subset I_x$. Demnach ist $I_x \cup C_x(z) = I_x \cup \overline{C_x(z)}$ als Vereinigung von zwei zusammenhängenden Mengen zusammenhängend. Nun ist $\bigcap_{z \notin C_x(y)} (C_x(z) \cup I_x) \neq \emptyset$, also $\overline{\bigcap_{z \notin C_x(y)} (C_x(z) \cup I_x)} =$ $= E/C_x(y)$ zusammenhängend. □

Wir definieren jetzt eine Verschärfung der Titsschen Trennungsrelation (vgl. II, 3.2.5). Dazu sei F ein topologischer Raum und A,B,C nichtleere Teilmengen von F.

4.1.12 Definition: B trennt A und C , T(A,B,C), gdw es nichtleere, offene Teilmengen $P_1, P_2 \subset F$ gibt, so daß gilt:

(i) $A \subset B \cup P_1 \ \wedge \ C \subset B \cup P_2$

(ii) $P_1 \cap P_2 = \emptyset \ \wedge \ P_1 \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset \ \wedge \ P_2 \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$

(iii) $P_1 \cup B \cup P_2 = F$

Hierbei ist $\overset{\circ}{B}$ das Innere von B.

4.1.13 Satz: T(A,B,C), dann zerlegt B den Raum F.

Beweis: Angenommen F/B sei zusammenhängend, dann folgt aus 4.1.12 (iii), daß $F/B \subset P_1 \cup P_2$. Falls $F/B \subset P_1$, dann folgt $F/P_1 \subset B$, also $P_2 \subset F/P_1 \subset B$ und damit ein Widerspruch zu 4.1.12 (ii) und $P_2 \neq \emptyset$. Analoges gilt für $F/B \subset P_2$, so daß mit $B_i := P_i \cap F/B \neq \emptyset$ folgt: $B_1 \cup B_2 = F/B$. Nun ist $P_1 \cup P_2$ nicht zusammenhängend, denn P_1, P_2 offen und disjunkt in $P_1 \cup P_2$ und damit $B_1 \cup B_2 = F/B$ nicht zusammenhängend. Das ist der gewünschte Widerspruch! □

4.1.14 Satz: T(A,B,C) ist invariant unter $\hat{R}$.

Beweis: Sei P_1, P_2 offen nach 4.1.12 für T(A,B,C) und $\tau \in \hat{R}$, dann ist $\tau P_1, \tau P_2$ offen und $\tau P_1 \cap \tau P_2 = \emptyset$. Aus $A \subset B \cup P_1$ folgt $\tau A \subset \tau(B \cup P_1)$ unddamit $\tau A \subset \tau B \cup \tau P_1$. Analog gilt $\tau C \subset \tau B \cup \tau P_2$. Offenbar gilt auch $\tau P_1 \cup \tau B \cup \tau P_2 = E$. Aus $\overset{\circ}{P_i \cap B} = \emptyset$ folgt $\overset{\circ}{\overbrace{P_i \cap B}} = \emptyset$ und aus $\tau(\overset{\circ}{\overbrace{P_i \cap B}}) = \emptyset$ folgt $\overset{\circ}{\overbrace{\tau(P_i \cap B)}} = \emptyset$, also $\overset{\circ}{\overbrace{\tau P_i \cap \tau B}} = \emptyset$. □

4.1.15 Satz: Die Bahnen $J_x^\circ(y)$ mit $y \in E/I_x$ zerlegen E einfach, d.h. das Komplement besteht aus zwei Komponenten.

Beweis: Nach Axiom 6 und 4.1.13 zerlegt $J_x^\circ(y)$ den Raum E. Angenommen, es existieren Q,Q' und Q'' paarweise nicht zusammenhängend und $E/J_x^\circ(y) = Q \cup Q' \cup Q''$. $J_x^\circ(y)$ ist zusammenhängend, also $J_x^\circ(y) \subset C_x(y)$ und es gilt: $J_x^\circ(C_x(y)) = C_x(y)$ (J_x°-Invarianz der Komponenten). Sei oBdA $x \in Q$, dann folgt aus $J_x^\circ(y) \subset C_x(y)$ und $E/C_x(y)$ zusammenhängend, daß $E/C_x(y) \subset Q$,

also $E/Q \subset C_x(y)$ und $E/C_x(y)$ ist invariant unter J_x^o. Damit gilt: $Q', Q'' \subset C_x(y)$. Sei nun $z' \in Q'$, $z'' \in Q''$, also $z', z'' \in C_x(y)$ und somit folgt $J_x^o(z') \subset Q'$ und $J_x^o(z'') \subset Q''$.

Allgemein gilt: Wenn $J_x^o(y)$ den Raum E in Z und Z' zerlegt und $z \in Z$, dann ist $J_x^o(z) \subset Z$.

Nach Axiom 6 folgt dann: $T(\{x\}, J_x^o(z'), J_x^o(z''))$ oder $T(\{x\}, J_x^o(z''), J_x^o(z'))$. Im ersten Fall gibt es P_1, P_2 offen mit $x \in P_1$ und $J_x^o(z'') \subset P_2$. Wegen $J_x^o(z') \subset Q'$ folgt $T(\{x\}, J_x^o(y), J_x^o(z')$, also $J_x^o(y) \subset P_1$ und damit $Q \subset P_1$ und $Q'' \subset P_1$. Damit ist dann $J_x^o(z'') \subset Q'' \subset P_1$, also $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, Widerspruch. □

4.1.16 Lemma: Das Innere von $J_x^o(y)$ ist leer für $y \in E/I_x$.

Beweis: Angenommen $\overset{\circ}{J_x^o(y)} \neq \emptyset$, dann gibt es $z \in J_x^o(y)$ und $J_x^o(y)$ ist eine Umgebung von z. Für jedes $u \in J_x^o(y)$ und $\tau \in J_x^o$ mit $\tau z = u$ ist dann $\tau J_x^o(y) = J_x^o(y)$ eine Umgebung von u, d.h. $J_x^o(y)$ ist offen. $J_x^o(y) \neq C_x(y)$, da $C_x(y)$ nicht zerlegt. Also existiert $z \in C_x(y)$, $z \notin J_x^o(y)$ mit $T(\{x\}, J_x^o(y), J_x^o(z))$. Seien P_1, P_2 die nach 4.1.12 existierenden, offenen Teilmengen zu $T(\{x\}, J_x^o(y), J_x^o(z))$, dann ist $E = P_1 \cup J_x^o(y) \cup P_2$ und aus dem Zusammenhang von E folgt $J_x^o(y) \cap P_i \neq \emptyset$, i=1,2, im Widerspruch zu 4.1.12 (ii). □

4.1.17 Satz: $J_x^o(y)$ ist abgeschlossen in E für alle $y \in E/I_x$.

Beweis: Sei $y \in E/I_x$, dann gibt es $z \in C_x(y)$ mit $T(\{x\}, J_x^o(y), J_x^o(z))$, denn die Komponenten zerlegen nicht, 4.1.11. Dann gibt es $P_1, P_2 \subset E$ offen und disjunkt und $B := E/P_1 \cup P_2 \subset J_x^o(y)$. B ist abgeschlossen und $\overset{o}{B} = \emptyset$ (4.1.16). $P_1 \cup P_2$ ist nicht zusammenhängend, also zerlegt B den Raum E. Sei zudem $Q \cup Q' = E/J_x^o(y)$, dann ist $Q \cup Q'$ nicht zusammenhängend. Wir zeigen zunächst:

$(*) \bigwedge_{u \in B} \bigwedge_{U \in \mathcal{U}(u)}: U \cap Q \neq \emptyset \ \wedge \ U \cap Q' \neq \emptyset$

(Hierbei ist $\mathcal{U}(u)$ die Menge der Umgebungen von $u \in E$.)

Offenbar ist $U \cap (Q \cup Q') \neq \emptyset$, da $\overset{o}{J_x^o(y)} = \emptyset$. Angenommen es gibt $u \in B$ und $U \in \mathcal{U}(u)$ mit $U \cap Q' = \emptyset$. Dann gilt: $B \subset J_x^o(y) = J_x^o(u) \subset \overline{J_x^o(U)} \subset \overline{Q}$. Aus $U \cap P_i \neq \emptyset$, $i=1,2$, und $U \subset \overline{Q}$ folgt dann $P_i \cap \overline{Q} \neq \emptyset$ und damit ist $\overline{Q} = (P_1 \cap \overline{Q}) \cup B \cup (P_2 \cap \overline{Q})$, wobei $(P_1 \cap \overline{Q}) \cup (P_2 \cap \overline{Q})$ nicht zusammenhängend ist. Also zerlegt B den Raum $\overline{Q}$, d.h. $\overline{Q}/B$ ist nicht zusammenhängend. Zudem gilt aber $Q \subset \overline{Q}/B \subset \overline{Q}$ und da Q zusammenhängend ist (4.1.15), folgt mit [BGT] I, §11.1 Prop.1 $\overline{Q}/B$ zusammenhängend, Widerspruch.

Als Folgerung ergibt sich, daß (*) für alle $u \in J_x^o(y)$ erfüllt ist.

Angenommen es gibt nun $w \in \overline{J_x^o(y)}$ und $w \notin J_x^o(y)$, dann sei oBdA $w \in Q$. Für alle $U \in \mathcal{U}(u)$ gilt $U \cap Q' \neq \emptyset$, denn sonst gäbe es ein $V \in \mathcal{U}(w)$ mit $Q' \cap V = \emptyset$. Da $w \in \overline{J_x^o(y)}$ ist, gibt es ein $v \in J_x^o(y)$ mit $V \in \mathcal{U}(v)$ im Widerspruch zu (*). Also ist $w \in \overline{Q'}$

und da Q' zusammenhängend ist, wird auch $Q' \cup \{w\}$ zusammenhängend, d.h. $Q' \cup Q$ zusammenhängend - im Widerspruch zur Zerlegung von $J_x^o(y)$. □

4.1.18 Corollar: Wenn $T(\{x\}, J_x^o(y), J_x^o(z))$, dann sind die nach 4.1.12 existierenden Mengen P_1, P_2 die Zerlegungskomponenten von $J_x^o(y)$.

4.2 Die reellwertige Quasimetrik

Die Bahnen $J_x^o(y)$, $J_x^o(z)$, $y,z \in E/I_x$, sind Äquivalenzklassen bezüglich der Relation " u gehört zur J_x^o-Bahn von y ", die wir im folgenden durch y^o, z^o (bei festem $x \in E$) abkürzen.

Sei $O_x^o(y) := \{z^o \mid z \in C_x(y)\}$ die Orbitmenge der Komponente von $y \in E/I_x$.

4.2.1 Lemma: $\tau O_x^o(y) = O_{\tau x}^o(\tau y)$ für alle $\tau \in \hat{R}$.

Beweis: Sei $z \in C_x(y)$, dann folgt $\tau C_x(y) \subset \tau E/I_x = E/I_{\tau x}$ und da $C_x(y)$ zusammenhängend ist, gilt $\tau C_x(y) \subset C_{\tau x}(\tau y)$. Zudem gilt $\tau^{-1} C_{\tau x}(\tau y) \subset C_x(y)$, also $C_{\tau x}(\tau y) \subset C_x(y)$, d.h. $C_x(y) = C_{\tau x}(\tau y)$. Aus $\tau z^o = \tau J_x^o(z) = J_{\tau x}^o(\tau y) = (\tau z)^o$ folgt dann: " $\subset$ ": $\tau z^o \in \tau O_x^o(y) \Longrightarrow \tau z \in C_{\tau x}(\tau y) \Longrightarrow (\tau z)^o \in O_{\tau x}^o(\tau y)$. " $\supset$ ": $u^o \in O_{\tau x}^o(\tau y) \Longrightarrow u \in C_{\tau x}(\tau y) \Longrightarrow \tau^{-1} u \in C_x(y) \Longrightarrow w^o \in O_x^o(y)$ mit $w = \tau^{-1} u \Longrightarrow u^o \in \tau O_x^o(y)$. □

4.2.2 Definition: Seien $u^o, v^o \in O_x^o(y)$.
$u^o < v^o$ gdw $T(\{x\}, J_x^o(u), J_x^o(v))$

4.2.3 Satz: $(O_x^o(y), <)$ ist total geordnet.

Beweis: Seien $u^o, v^o, w^o \in O_x^o(y)$ mit $u^o < v^o$ und $v^o < w^o$, also $T(\{x\}, J_x^o(u), J_x^o(v))$ und $T(\{x\}, J_x^o(v), J_x^o(w))$. Seien P_1, P_2 und P_1', P_2' die offenen Zerlegungskomponenten, dann folgt $P_1 \subset P_1'$ und $P_2' \subset P_2$, also gilt $J_x^o(w) \subset J_x^o(u) \cup P_2$ und damit $T(\{x\}, J_x^o(u), J_x^o(w))$.
Seien nun $u^o < v^o$ und $v^o < u^o$ und seien P_1, P_2 und P_1', P_2' wieder die entsprechenden Zerlegungskomponenten. Dann gilt $P_i \subset P_i'$ und $P_i' \subset P_i$, also $P_i = P_i'$, $i=1,2$ und damit $J_x^o(u) = J_x^o(v)$.
Seien schließlich $u^o, v^o \in O_x^o(y)$, dann folgt $u \in C_x(v)$ und mit Axiom 6 folgt $u^o < v^o$ oder $v^o < u^o$. □

4.2.4 Lemma: $(O_x^o(y), <)$ hat kein erstes und kein letztes Element.

Beweis: Sei $u^o \in O_x^o(y)$, also $u \in C_x(y)$, dann folgt aus der Offenheit von $C_x(y)$, daß eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(u)$ existiert mit $U \subset C_x(y)$. Seien P_1, P_2 die Zerlegungskomponenten von $J_x^o(u)$ und oBdA $x \in P_1$, dann folgt $T(\{x\}, J_x^o(u_1), J_x^o(u))$ und $T(\{x\}, J_x^o(u), J_x^o(u_2))$ für $u_i \in U \cap P_i$, $i=1,2$. □

4.2.5 Lemma: $(O_x^o(y), <)$ hat weder Sprünge noch Lücken, d.h. $(O_x^o(y), <)$ ist im Dedekindschen Sinn stetig (vgl. [HAU], S.90)

Beweis: Sei $O_x^o(y) = M + N$ in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen zerlegt, dann ist zu zeigen, daß die folgenden Fälle nicht auftreten.
"Lücke": M hat kein letztes und N hat kein erstes Element.
"Sprung": M hat ein letztes und N hat ein erstes Element.
Seien $M := \{z \in C_x(y) \mid J_x^o(z) \in M\}$ und
$N := \{z \in C_x(y) \mid J_x^o(z) \in N\}$, dann folgt: $C_x(y) = M + N$.
Da $C_x(y)$ zusammenhängend ist, sind M und N weder zugleich offen noch zugleich abgeschlossen. Dann sind M und N nicht zugleich offen im Sinn von 4.2.4. Analog argumentiert man, daß M und N nicht zugleich Randelemente besitzen, d.h. $O_x^o(y)$ hat weder Lücken noch Sprünge. □

4.2.6 Lemma: In $O_x^o(y)$ gibt es eine abzählbare, bezüglich der Ordnungstopologie dichte Teilmenge.

Beweis: Da E separabel ist, gibt es in $C_x(y)$ eine abzählbare, E-dichte Teilmenge D. Sei $\mathcal{D}_x^o := \{d^o \in O_x^o(y) \mid d \in D\}$, dann ist $\mathcal{D}_x^o$ abzählbar. Sei $u^o \in O_x^o(y)$ und U^o eine Umgebung von u^o bezüglich der Ordnungstopologie. Wegen der Stetigkeit der kanonischen Abbildung $C_x(y) \to C_x(y)\big|_{J_x^o} \equiv O_x^o(y)$ ist $U := \{z \in C_x(y) \mid J_x^o(z) \in U^o\}$ eine E-Umgebung von $J_x^o(u)$. $J_x^o(u)$ liegt nirgends E-dicht (4.1.17), also gibt es ein $d \in (D \cap U)/J_x^o(u)$ mit $d^o \in \mathcal{D}_x^o$ und $d^o \in U^o$. □

4.2.7 Satz: $O_x^o(y)$ ist zu einem offenen Intervall aus $\mathbb{R}$ ordnungsisomorph.

Beweis: Mit 4.2.3 bis 4.2.6 erfüllt $O_x^o(y)$ die Voraussetzungen von [HAU] Kap.IV,§7 Satz III, aus dem die Behauptung folgt. □

Demnach existiert ein Ordnungsisomorphismus

4.2.8 $f_{x,y}: O_x^o(y) \to (0,\infty)$ mit $f_{x,y}(u^o) < f_{x,y}(v^o) \leftrightarrow u^o < v^o$

auf die positiven, reellen Zahlen und $f_{x,y}$ ist ein Homöomorphismus bezüglich der Ordnungstopologien. Mit den Erweiterungen

4.2.9 $O_x(y) := O_x^o(y) \cup \{I_x\}$ und $I_x < u^o$ für alle $u^o \in O_x^o(y)$

liegt $O_x^o(y)$ in $O_x(y)$ ordnungstopologisch dicht. Offenbar läßt sich dann $f_{x,y}$ auf $O_x(y)$ stetig fortsetzen.

4.2.10 $\overline{f}_{x,y}: O_x(y) \to [0,\infty)$ mit $\overline{f}_{x,y}(z^o) := \begin{cases} f_{x,y}(z^o), & z \in C_x(y) \\ 0, & z \in I_x \end{cases}$

Da der Rand von den Komponenten $C_x(y)$ im Isotropiekegel I_x enthalten ist, können wir die verschiedenen Komponentenfunktionen $f_{x,y}$, $y \in E/I_x$, stetig zusammenfassen. Dazu definieren wir den gesamten Orbitraum durch

4.2.11 $O_x := \bigcup_{y \in E/I_x} O_x(y)$

und versehen ihn mit der Summentopologie (vgl. [BGT] I, §2,4 Example 3). Dann ist eine Teilmenge A aus O_x genau dann offen, wenn jeder der Schnitte $A \cap O_x(y)$ offen ist, so daß die folgende Funktion stetig ist.

4.2.12 $g_x : O_x \to [0,\infty)$ mit $g_x(z^o) := \overline{f}_{x,y}(z^o)$, für $z^o \in O_x(y)$

Aus der $\hat{R}$-Invarianz der T-Relation (4.1.14) folgt die Invarianz der Ordnungsrelation auf $O_x^o(y)$ und mit 4.1.17 folgt, daß $O_x(y)$ invariant unter $\hat{R}$ ist. Damit stimmen für alle $x \in E$ und für alle $y \in E/I_x$ die Funktionen $\overline{f}_{x,y}$ und $\overline{f}_{\tau x,\tau y}, \tau \in \hat{R}$, bis auf Ordnungsisomorphie überein. Wir können deshalb bei fest gewähltem $x \in E$ die Funktionen $g_{x'}$, $x' \in E$, mit der Funktion g_x identifizieren und erhalten damit die Invarianz:

4.2.13 $g_{\tau x}(\tau u^o) = g_x(u^o)$ für alle $\tau \in \hat{R}$ $\quad u^o \in O_x$.

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir die

4.2.14 Quasimetrik: $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ mit $\rho(x,y) := g_x(y^o)$

die wegen 4.2.8 und 4.2.12 stetig ist. Darüber hinaus gilt:

4.2.15 (i): $\rho(x,x) = g_x(x^o) = 0$

(ii): $\rho(\tau x,\tau y) = g_{\tau x}(\tau y^o) = g_x(y^o) = \rho(x,y)$ für alle $\tau \in \hat{R}$

IV. Die Geometrien des Raum- bzw.Raumzeitproblems

1. Die Klassifizierung von Freudenthal

Im letzten Kapitel haben wir die allgemeinen Voraussetzungen der Freudenthalschen Arbeit ([FRE 2]Kap.0.2) als Sätze unseres Axiomensystems hergeleitet. Daneben postuliert Freudenthal noch eine Reihe von Axiomen ([FRE 2] 0.3 - 0.5), die wir kurz erläutern wollen. Hierzu verwenden wir wieder die in den Kapiteln II und III eingeführten Buchstaben, insbesondere E für den topologischen Raum, ρ für die Quasimetrik und $\hat{R}$ für die Transformationsgruppe. Die Numerierung der Axiome übernehmen wir von Freudenthal.

$\theta_i(E,\rho,\hat{R})$: Wenn $x_1,\ldots, x_i \in E$, $\tau_n \in \hat{R}$, $n \in N$ und
$\tau_n x_j \to x_j$ für $j = 1, \ldots, i$, dann gibt es
$\sigma_n \in \hat{R}$, $n \in N$ mit $\sigma_n \to id$ und $\sigma_n x_j = \tau_n x_j$, $j = 1,\ldots$

Freudenthal benützt dieses Axiom nur bis $i = 3$. Mit θ_1 läßt sich E als Nebengruppenraum $\hat{R}|_J$ nach einer Standuntergruppe J auffassen, d.h. die Abbildung $\tau J_x \to \tau x$ ist ein Homöomorphismus von $R|_{J_x}$ auf E für jedes $x \in E$. E heißt dann ein topologisch homogener Raum (vgl.[BGT] III, § 2.5). Für $i > 1$ ergeben sich aus θ_i analoge Resultate für die Bahnen der Standuntergruppen.

Das Axiom Θ_i läßt sich mit der Freudenthalschen Interpretation (vgl.[FRE 1]) des Axioms III aus den Grundlagen der Geometrie von Hilbert (vgl.[HIL], Anhang IV) vergleichen. Bei Freudenthal erscheint dieses abstrakte Starrheitsaxiom (vgl.II, §1.1) in einer verkürzten Formulierung ("3-Punkt-Axiom"):

> "Wenn $x_1,\ldots,x_3,y_1,\ldots,y_3 \in E$, $\tau_n \in \hat{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\tau_n x_i \to y_i$ für $i = 1,\ldots,3$, dann gibt es $\sigma \in \hat{R}$ mit $\sigma x_i = y_i$ für $i = 1,\ldots,3$."

Sowohl in Θ_i wie auch im 3-Punkt-Axiom wird eine gewisse Abgeschlossenheit der topologischen Gruppe gefordert, die jedoch im letzteren Fall erheblich stärker einschneidet. Denn mit dem 3-Punkt-Axiom werden z.B. im $\mathbb{R}^3$ die Dilatationen und Lorentz-Transformationen ausgeschlossen. D.Hilbert formulierte allerdings in seinem Axiom III eine noch schärfere Forderung:

> "Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels A'B'C' übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel A'B'C' übergeht."

Der Unterschied zum 3-Punkt-Axiom liegt in der schwächeren Voraussetzung des Hilbertschen Axioms. Es lassen sich nämlich neben den Dilatationen, Lorentz-Transformationen auch die Gali-

lei-Transformationen ausschließen. Dies sieht man sofort, wenn man für A = B = C den Nullpunkt in IR^3 und für A' = B' und C' zwei verschiedene, ursprungssymmetrische Punkte in der Gleichzeitigkeitsebene t = 0 wählt. Dann ist die Prämisse des Axioms III bei hinreichend starken "Galilei-Schüben" erfüllt, die Konklusion dagegen nicht. Erstaunlicherweise scheint die Freudenthalsche Interpretation - das 3-Punkt-Axiom- die Galilei-Gruppe nicht auszuschließen. Die im Hilbertschen Axiom enthaltene euklidische Starrheit wird also durch die Freudenthalsche Formulierung nicht mehr wiedergegeben. Wir kehren nun zur Axiomatik bei [FRE 2] §.3 - 0.5 zurück.

Das folgende Axiom Φ_1 legt fest, daß die Isotropiekegel für verschiedene Punkte x,y weder global noch lokal übereinstimmen. Das bedeutet, es soll keine offene Umgebung von W aus E geben, für die $I_x \cap W = I_y \cap W \neq \emptyset$ erfüllt ist. Freudenthal formuliert diese Bedingung etwas allgemeiner.

$\Phi_1(E,\rho,\hat{R})$: Sei $y \in I_x$, $y = x$. Sei M_{xy} die Menge der $z \neq y$ mit der Eigenschaft: es gibt eine Umgebung W von y mit $I_x \cap W = I_z \cap W$. Dann ist M_{xy} zusammenhangslos.

Durch Φ_1 wird also die 2-dimensionale Relatititätstheorie ausgeschlossen. In diesem Zusammenhang erinnern wir an die Arbeit von E.C.Zeeman "Causality implies the Lorentz Group" (1964), in der ebenfalls die 2-dimensionale Relativitätstheorie ausgeschlossen wird. Zeeman zeigt, daß andernfalls die Kausalitätsgruppe viel umfangreicher als die orthochrone Lorentzgruppe,

die Translations- und Dilatationsgruppe ist, weil es dann nichtlineare, kausale Automorphismen gibt, die z.B. die Koordinatenachsen in gekrümmte Linien abbilden. Zeeman bemerkt dazu: "Thus the typical 2-dimensional picture of Minkowski space to be found in most textbooks is misleading."

$\Phi_2(E,\rho,\hat{R})$: Jedes $x \in E$, $x \neq x_o$, hat eine Umgebung W, so daß zu jedem $y \in W$ mit $\rho(x_o,x) = \rho(x_o,y)$ ein $\tau \in J_{x_o}$ mit $\tau x = y$.

In Φ_2 wird die lokale Transitivität der Standuntergruppen auf den Abstandssphären und auf dem Isotropiekegel gefordert. Freudenthal zeigt dann, daß Φ_2 in Verbindung mit Θ_2 verhindert, daß ρ identisch verschwindet. Im nächsten Axiom verbietet er zudem eindimensionale Räume E.

$\Phi_3(E,\rho,\hat{R})$: In einer gewissen Umgebung von x ist keine positive Abstandssphäre nulldimensional, außer etwa in x selber.

Mit diesen Axiomen zeigt Freudenthal, daß die Gruppe $\hat{R}$ eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{J}$ eine maximale Subalgebra der zu $\hat{R}$ gehörenden Lie-Algebra $\hat{R}$ ist. Wenn $\hat{R}$ nicht einfach ist, ergibt sich ohne Schwierigkeiten die gewünschte Klassifikation.

Allerdings reichen diese Axiome für den Fall, daß $\hat{R}$ einfach ist, zur Bestimmung der Geometrien nicht aus. Die auf-

tretenden Schwierigkeiten, die nach Freudenthal "vielleicht nicht wesentlich sind", werden durch weitere Bedingungen von der Art Φ überwunden, die jetzt allerdings von zweiter Stufe sind. Sei dazu E_y die y-Komponente der Bahn $J_x(y)$ und $\hat{R}_y$ die von J_x in E_y induzierte Gruppe. Sei weiter ρ_y die Restriktion von ρ auf E_y. Die Postulate zweiter Stufe lauten dann:

$\Phi_i(E_y,\rho_y,\hat{R}_y)$ für alle y einer gewissen Umgebung von x mit $\rho(x,y) \neq 0$.

Sie werden tatsächlich nur für i = 1,2 gebraucht. Analog dazu lassen sich Bedingungen höherer Stufen einführen. Mit diesen Postulaten läßt sich die Klassifikation der zulässigen Standuntergruppen auf ein algebraisches Problem zurückführen. Die Bestimmung der gewünschten Standuntergruppen ist dennoch ziemlich schwierig. Ihre Einbettung in die geeigneten Gruppen $\hat{R}$ verläuft ähnlich wie im Fall der Raumgeometrie. Als Hauptergebnis erhält Freudenthal dann den Satz:

> "Die Geometrien $(E,\rho,\hat{R})$, die die Axiome $\Theta_i(E,\rho,\hat{R})$, i = 1,...,3, Φ_j, j = 1,...,3 erster Stufe und Φ_k, k = 1,2 zweiter, dritter und vierter Stufe erfüllen sind
>
> (i) die n-dimensionalen, euklidischen und nichteuklidischen Geometrien ($n \geq 2$), d.h. die parabolischen, hyperbolischen und elliptischen und sphärischen Räume

(ii) die n-dimensionalen pseudo-euklidischen und pseudo-nichteuklidischen Geometrien ($n \geq 3$)".

Das gleiche Resultat erhält man, wenn statt der Bedingungen dritter und vierter Stufe gefordert wird, daß $\hat{R}$ die id-Komponente der vollen Isometriegruppe von ρ ist

Die pseudo-euklidischen und pseudo-nichteuklidischen Geometrien sollen im folgenden für den physikalisch interessanten Fall $n = 4$ etwas näher erläutert werden. Wir stätzen uns dabei auf J.Tits "Les espaces isotropes de la relativité" (1960). Dazu sei $E = (M, ds)$ ein pseudo-riemannscher Raum von 4 Dimensionen, d.h. M ist eine zusammenhängende, differenzierbare Mannigfaltigkeit (4-dimensional) und ds^2 ist eine quadratische Differentialform vom hyperbolischen Typ (+,+,+,-) auf M. E sei zudem global homogen, d.h. auf E operiert eine transitive Gruppe von Isometrien. In jedem Punkt $x \in M$ zerlegt der "Elementarkegel" ε_x, definiert durch $ds^2 = 0$, den Raum unmittelbar nach x in drei Richtungen: in die "Zeitrichtung" innerhalb des Elementarkegels ($ds^2<0$), in die"Lichtrichtung", die zum Elementarkegel gehört und in die "Raumrichtung" außerhalb von ε_x ($ds^2>0$). Zudem sei E noch global 1-isotrp, d.h. die Standuntergruppen der Isometriegruppe operieren transitiv in Lichtrichtung.

1. Raum mit konstanter Krümmung K = 0; Minkowski-Raum. (pseudo-euklidisch)

2. Raum mit konstanter Krümmung K > 0; "Pseudo-euklidische Hypersphäre"(sphärisches de Sitter-Universum, vgl. [VAL]). Hierbei ist M die Hypersphäre, die durch die Gleichung $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - t^2 + u^2 = \frac{1}{K}$ in einem 5-dimensionalen pseudo-euklidischen Raum definiert ist. Seine Metrik ist durch die quadratische Form $\sum_{i=1}^{3} dx_i^2 - dt^2 + du^2$ gegeben. ds^2 ist dann die Einschränkung der quadratischen Form auf M.

3. Raum mit konstanter Krümmung K < 0; "Pseudo-euklidische Hypersphäre". Analog zum Fall positiver Krümmung wird die Mannigfaltigkeit M durch die Hypersphäre dargestellt, die durch die Bedingung $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - t^2 - u^2 = -\frac{1}{K}$ definiert ist. Als Basis wird wieder ein 5-dimensionaler pseudo-euklidischer Raum verwendet, dessen Metrik durch die quadratische Form $\sum_{i=1}^{3} dx_i^2 - dt^2 - du^2$ ausgezeichnet ist und deren Einschränkung auf M die Form ds^2 ergibt.

Literatur

[BÖH] G.Böhme (Hrsg.): "Protophysik." Suhrkamp, Frankfurt (1976)

[B-H] H.J.Borchers und G.C.Hegerfeldt: "The Structure of Space-Time Transformations", Commun.math.Phys.28, 259 - 266 (1972)

[BGT] N.Bourbaki: "Elements of Mathematics. General Topology." Herman, Paris (1966)

[CAN] G.Cantor: "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", Math.Ann.5, 123 - 132 (1872)

[DED] R.Dedekind: "Stetigkeit und irrationale Zahlen", Braunschweig (1872)

[DIN] H.Dingler: "Das Experiment. Sein Wesen und seine Geschichte", Reinhard, München (1928)

[DIR] P.A.M. Dirac, Proc.Roy.Soc. A333, 403 (1973)

[EHL] J.Ehlers: "Survey of General Relativity Theory", W.Israel (ed.) Relativity, Astrophysics and Cosmology, Reidel (1973)

[EIN] A.Einstein: "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Ann.d.Phys. 17 (1905) 891

[FRE 1] H.Freudenthal: "Neuere Fassung des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems", Math.Zeitschr.63 374-405 (1956)

[FRE 2] H.Freudenthal: "Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik", Math.Annalen 156 263-312 (1964)

[HAU] F.Hausdorff: "Grundzüge der Mengenlehre" Leipzig (1914) Nachdr. Chelsea P.C. New York (1949)

[HEL] H.v.Helmholtz, Nachr.Ges.Wiss. Göttingen 193-221 (1868)

[HIL] D.Hilbert: "Grundlagen der Geometrie" Teubner,Stuttgart (^{10}1968)

[IGN] W.v.Ignatowsky, Arch.Math.Phys. 17 (1910) und 18 (1911) 17, Phys.Ztschr. 11 (1910) 972 und 12 (1911) 779

[K-P] E.Kronheimer und R.Penrose: "On the Structure of Causal Spaces", Proc.Camb.Phil.Soc. 63 481-501 (1967)

[LIE] S.Lie: "Über die Grundlagen der Geometrie", Berichte Ges.Wiss.Leipzig 42, 284-321, 355-418 (1890)

[LOR 1] P. Lorenzen: "Entstehung der exakten Wissenschaften" Springer, Berlin (1960)

[LOR 2] P. Lorenzen: "Theorie der technischen und politischen Vernunft", Reklam, Stuttgart (1978)

[LUD 1] G.Ludwig: "Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik", Bd.1: Raum, Zeit, Mechanik; Bertelsmann, Düsseldorf (1974)

[LUD 2] G.Ludwig: "Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik", Bd.2: Elektrodynamik, Zeit, Raum, Kosmos; Bertelsmann, Düsseldorf (1974)

[LUD 3] G.Ludwig: "Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie"; Springer, Berlin (1978)

[MIN] H.Minkowski: "Das Relativitätsprinzip", Jahresber. d.Deutsch.Math.Ver. 24 (1915) 372

[POI] H.Poincaré: "Sur la dynamique de l'électron", Paris C.R. 140 (1905)

[REI] H.Reichenbach: "Philosophie der Raum-Zeit-Lehre", Bd.2 Gesammelte Werke, A.Kamlah, M.Reichenbach (eds.) Vieweg,Braunschweig (1977)

[RIE] B.Riemann, Habilitationsvortrag (1854), 1867 veröffentlicht in Abh.Ges.Wiss. Göttingen 15

[ROB] A.A.Robb:"The Absolute Relations of Time and Space" Cambridge U.P. (1921)

[SCH] H.-J.Schmidt: "Zum physikalischen Raumproblem", Habilitationsschrift (1978), erscheint in Lecture Notes in Physics

[SCU] J.W.Schutz: "Foundations of Special Relativity: Kinematic Axioms for Minkowski Space-Time", Lecture Notes in Mathematics, Springer (1973)

[SÜß 1] G.Süßmann: "Begründung der Lorentz-Gruppe allein mit Symmetrie- und Relativitätsannahmen", Z.Naturf. 24a 495-498 (1969)

[SÜß 2] G.Süßmann: "Kennzeichnung der Räume konstanter Krümmung", erscheint in"Materialienhefte des Schwerpunkts Mathematisierung", Bielefeld

[SZE] G.Szekeres: "Kinematic Geometry" , J.Aust.Math. Soc. VIII, 134-160 (1968)

[TIT 1] J.Tits: "Sur certaines classes d'espaces homogènes des groupes de Lie",Mém.Acad.Roy.Belg. Sci.29 (3) (1955)

[TIT 2] J.Tits: "Colloque sur la théorie de la relativité", Centre Belge Recherches Math. 107-119 (1960)

[VAL] P.du Val: "Geometrical note on de Sitter's world", Philos.Mag.47 930-938 (1924)

[WAL] A.G.Walker: "Foundations of Relativity", Proc.Roy. Soc.Edinburgh,Sect. A 62, 319-335 (1948)

[WEY 1] H.Weyl: "Mathematische Analyse des Raumproblems", Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid, Springer, Berlin (1923)

[WEY 2] H.Weyl: "Raum, Zeit, Materie", Springer, (^{6}1970)

[YAM] H.Yamabe: "A Generalization of a Theorem of Gleason", Ann.of Math.(2) 58 351-365 (1953)

[ZEE] E.C.Zeeman: "Causality Implies the Lorentz-Group", J.of Math.Phys. 5, 490-493 (1964)

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Süßmann für die freundliche Unterstützung der vorliegenden Arbeit und für die zahlreichen anregenden Diskussionen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. H.-J. Schmidt für die vielen wertvollen Anregungen und klärenden Gespräche.

Lebenslauf

Am 2. Mai 1944 wurde ich als zweites Kind des Schriftstellers Otto Mayr und dessen Ehefrau Rosa Mayr, geb. Merkl, in Freising geboren. Von 1950 bis 1961 besuchte ich die Volksschule und die Rupprecht - Oberrealschule in München. Nach einer abgeschlossenen Ausbildung als chemisch-technischer Assistent besuchte ich das München-Kolleg und legte dort im März 1966 die Reifeprüfung ab. Im Sommersemester 1966 begann ich an der Ludwig-Maximilians-Universität München das Studium der Physik. Nach meiner Heirat im Herbst 1967 wurde im Mai 1968 meine Tochter Ulrike geboren. Am Anfang des Wintersemesters 1968/69 bestand ich die Diplom-Vorprüfung. Unter Anleitung von Dr. W. Ochs begann ich 1973 am Lehrstuhl Prof. Dr. G. Süßmann meine Diplomarbeit mit dem Titel "Über das Friedrichs-Modell". Im Juli 1974 legte ich die Diplom-Hauptprüfung ab. Vom September 1974 an war ich drei Jahre als wissenschaftlicher Mitarbeiter an einer von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsarbeit aus dem Gebiet der Wissenschaftstheorie beschäftigt, die von Dr. W. Hoering am Lehrstuhl Prof. Dr. W. Stegmüller geleitet wurde. In dieser Zeit publizierte ich einige Arbeiten über die Grundstrukturen von physikalischen Theorien. Anschließend begann ich mit meiner Dissertation am Lehrstuhl von Prof. Süßmann.